30 septembre 2025

Serie 3

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, l'ensemble V est-il un K-espace vectoriel pour la loi évidente d'addition et la multiplication scalaire donnée?

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,\ y) \in V$.

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in V$.

c) $K = \mathbb{F}_3$, $V = K^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour $\lambda \in \mathbb{F}_3$ et $(x, y) \in V$.

d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[t] \mid f(0) = a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, et la multiplication scalaire est celle au sens usuel.

e) $K = \mathbb{C}$, $V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = |z_2|\}$, et $\lambda \cdot (z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(z_1, z_2) \in V$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers lui-même. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

a) L'ensemble des fonctions qui sont continues sur l'intervalle $]0, 1[$.

b) L'ensemble des fonctions qui s'annulent sur tout l'intervalle $[0, 1]$.

c) L'ensemble des fonctions continues valant 1 en 0.

d) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x + 2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

(a) Soient v_1, v_2 deux vecteurs d'un $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel. On définit trois sous-espaces $V_1 = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$, $V_2 = \mathrm{Vect}\,(v_1 + 2v_2, v_2)$ et $V_3 = \mathrm{Vect}\,(v_1 + 2v_2, 2v_1 + v_2)$. Montrer que $V_1 = V_2$. Est-ce que $V_3 = V_1$?

(b) Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$, lesquels des sous-espaces suivants sont égaux?

$$W = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 & 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix});$$

$$U = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -1 \\ -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 & 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix});$$

$$Z = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}).$$

Exercice 4. Soit K un corps et $a \in K$. Considérons l'application d'évaluation en a

$$ev_a : K[x] \to K.$$

Comme $K[x]$ est un K-espace vectoriel, $(K[x], +)$ est un groupe abélien, et comme K est un corps $(K, +)$ est aussi un groupe abélien. L'application ev_a est un morphisme de groupes. Montrer que le noyau de ev_c est un sous-espace vectoriel de $K[x]$.