

On peut prouver ce qui suit :

$$\text{considérons } K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \in \text{IM}_{2 \times 2}(\mathbb{F}_2) \right\}.$$

Alors,

① K est un corps avec 4 éléments.

(les opérations sont l'addition et la multiplication de matrices)

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$0 \qquad I \qquad A^2 = A + I \qquad A$

② $\varphi: K \longrightarrow \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \longmapsto (a, b)$$

est un morphisme d'anneaux surjectif, où

$$\bullet (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$\bullet (a, b) \cdot (c, d) = (ac+bd, ad+bc+bd)$$

$\Rightarrow \text{Im}(\varphi)$ est un corps.