23 septembre 2025

Serie 2

Exercice 1. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ (muni de l'addition et de la multiplication usuelle) sont des anneaux unitaires?

(a) l'ensemble des entiers divisibles par 3, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{A} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, ab \neq 0, \mathrm{pgcd}(a, b) = 1, b \text{ impair}\} \cup \{0\}$.

Exercice 2. Répondre à chacune des questions suivantes.

(a) Est-ce que l'équation $x^2 - 2 = 0$ a des solutions dans le corps $\mathbb{F}_{11}$?

(b) Est-ce que l'équation $x^2 = -4$ a des solutions dans le corps $\mathbb{F}_{13}$?

Exercice 3. Résoudre les équations $x^2 + 2x + 2 = 0$ et $x^2 + 2x + 3 = 0$ dans le corps $\mathbb{F}_5$.

Exercice 4. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ des entiers modulo 12. Trouver tous les éléments inversibles dans A. (Rappel: dans un anneau, les éléments inversibles sont ceux qui possèdent un inverse par rapport à la multiplication.)

Exercice 5. Posons $E = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

(a) Vérifier que E est stable par l'addition usuelle des nombres réels et que $E \setminus \{0\}$ est stable par la multiplication usuelle.

(b) Montrer que chaque élément de E possède un inverse additif dans E et que chaque élément non nul de E possède un inverse multiplicatif dans E.

(Ce sont deux des vérifications nécessaires pour voir que E est un corps.)

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En cours nous avons remarqué que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un anneau unitaire, avec l'addition et la multiplication d'applications usuelles. On définit $G : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, par $G(f) = f(0)$, pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Par exemple pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^3 - \sin x$, on trouve $G(f) = 0^3 - \sin(0) = 0$.

Montrer que G est un morphisme d'anneaux.

Exercice 7. Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments. On munit l'ensemble $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ des lois de composition $+$ et $\cdot$ définies par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd).$$

Montrer que $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, +, \cdot)$ est un corps à quatre éléments.