

16 septembre 2025

Serie 1

Exercice 1. On considère \mathbb{N} muni de la loi de composition suivante : $x * y = \max(x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. (Ici, “max” veut dire le maximum des deux et $\max(x, x) = x$.) Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- Cette loi de composition est associative.
- Cette loi de composition n’est pas commutative.
- L’élément 0 est l’élément neutre.
- Aucun élément n’admet d’inverse.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils stables pour la multiplication usuelle ? Justifier votre réponse.

- $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k, l \in \mathbb{Z} \text{ tels que } n = k^2 - l^2\}$.
- $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 4k + 2, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.
- $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 4k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3. Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Montrer que $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ et que $\sigma\rho = \rho\sigma$.

Exercice 4. Soit \diamond la loi de composition sur \mathbb{R} définie par $x \diamond y = xy - x - y + 2$.

Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \diamond)$ est un groupe commutatif.

Exercice 5. Soient $(G, *)$ un groupe et $g_1, \dots, g_n \in G$, avec inverses respectifs $g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}$. Montrer que l’inverse de $g_1 * \dots * g_n$ est égal à $(g_n^{-1} * \dots * g_1^{-1})$.

Exercice 6. Soit $(G, *)$ un groupe. Fixons $a \in G$ et définissons l’application $T_a : G \rightarrow G$ (une translation) par $T_a(g) = a * g$, pour tout $g \in G$. Montrer que T_a est une application bijective, c’est-à-dire surjective et injective.

Exercice 7. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, \circ) des groupes. On munit le produit cartésien $G_1 \times G_2$ d’une loi de composition \cdot comme suit

$$\cdot : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2, \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a * c, b \circ d), \text{ pour } a, c \in G_1, b, d \in G_2.$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 8. On note $(\mathbb{R}, +)$ le groupe des nombres réels avec l’addition usuelle. On considère $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ muni de la multiplication usuelle, qui est un groupe noté (\mathbb{R}^*, \cdot) .

- On désigne par $\mathbb{R}_{>0}$ l’ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \cdot) .
- On définit une application $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ qui envoie $x \in \mathbb{R}$ vers $\exp(x)$. Montrer que c’est un homomorphisme de groupes. Déterminer son noyau et son image.

Facultatifs

Exercice 9. Soit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers modulo 6. Pour $a \in \mathbb{Z}$ on notera par $\bar{a} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ la classe d'équivalence de a modulo 6. On définit une loi de composition $*$ sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ par $\bar{a} * \bar{b} = \overline{ab}$, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ ¹.

(a) Déterminer si $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, *)$ est un groupe.

(b) Trouver toutes les solutions de l'équation $x * x + x = \bar{0}$ pour $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 10.² Soit S^1 le cercle unité dans \mathbb{R}^2 , c.-à-d.

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

On définit la loi de composition $*$ sur \mathbb{R}^2 par

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que ceci définit une loi de composition associative et commutative sur \mathbb{R}^2 .

b) Montrer que S^1 est stable pour $*$.

c) Trouver des expressions pour l'élément neutre, et pour l'inverse d'un élément quelconque $(a, b) \in S^1$.

d) Montrer que $(S^1, *)$ est un groupe. Est-il commutatif?

Exercice 11. Soient G un groupe et H, K des sous-groupes de G . Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

Exercice 12. Soit G un groupe et posons $E = \{H \subseteq G \mid H \text{ est un sous-groupe de } G\}$. On définit une relation sur E comme suit :

pour $H_1, H_2 \in E$, on dit que $H_1 \sim H_2$ si H_1 est un sous-groupe de H_2 . Montrer que \sim est une relation réflexive et transitive.

¹Ici ab est le produit usuel de a et b dans \mathbb{Z} , et on admet que la loi de composition $*$ est bien définie et associative.

²Cet exercice est recommandé si vous souhaitez encore vous entraîner à vérifier les axiomes de groupe.