Problèmes pour s'entraîner à l'examen

Aline Zanardini

Décembre 2025

Notation : Dans l'examen, on va utiliser les notations suivantes :

- K est un corps quelconque ; on écrira 0 pour l'élément neutre pour l'addition et 1 pour l'élément neutre pour la multiplication.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels.
- $\mathbb{Q}$ est le corps des nombres rationnels.
- $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes, $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Pour un nombre premier p, $\mathbb{F}_p$ est le corps fini à p éléments des entiers modulo p, et pour $a \in \mathbb{Z}$, on écrit encore $a \in \mathbb{F}_p$, pour la classe de a modulo p.
- $K[x]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans K.
- $K[x]_{\leq m}$ désigne le K-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K de degré au plus m.
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- $\mathbb{M}_{n\times m}(K)$ désigne le K-espace vectoriel des matrices de taille $n \times m$ et à coefficients dans K.
- $\mathrm{GL}(n, K)$ désigne le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans K, avec loi de composition la multiplication de matrices.
- Pour un K-espace vectoriel V de dimension finie avec base ordonnée B, et pour $v \in V$, on écrit $[v]_B$ pour le vecteur colonne formé des coordonnées de v par rapport à la base B.
- Pour une application linéaire $\varphi : V \to W$ entre deux K-espaces vectoriels V et W de dimension finie avec bases ordonnées B et C, respectivement, on écrit $[\varphi]_{B,C}$ pour la matrice de φ par rapport à ces bases.
- On utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Exercice 1. *Définissez les concepts suivants.*

(a) Espace vectoriel sur un corps K et K-espace vectoriel de dimension finie.

(b) Application K-linéaire entre deux K-espaces vectoriels.

(c) Noyau et image d'une application linéaire.

(d) Somme directe des sous-espaces vectoriels.

(e) Base d'un K-espace vectoriel.

(f) Matrice d'une application linéaire $\varphi : V \to W$ par rapport à des bases B de V et C de W.

(g) Valeur propre d'un endomorphisme linéaire.

(h) Polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

(i) Matrice/opérateur trigonalisable.

(j) Matrice/opérateur diagonalisable.

Exercice 2. *Donnez un exemple pour chacun des objets suivants. Justifiez votre réponse et faites en sorte que vos exemples soient concrets.*

(a) Une application $\mathbb{R}$-linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui n'est pas trigonalisable.

(b) Une application $\mathbb{F}_3$-linéaire $\varphi : \mathbb{F}_3^2 \to \mathbb{F}_3^2$ qui n'est pas diagonalisable.

(c) Une application $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ qui n'est pas inversible.

(d) Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ (sur $\mathbb{R}$) de dimension 5.

(e) Une partie de $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{F}_4)$ de cardinalité trois, liée.

(f) Une application $\mathbb{R}$-linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $c_\varphi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

(g) Une application $\mathbb{R}$-linéaire $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas surjective.

(h) Une matrice $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ avec une seule valeur propre.

(i) Deux matrices $A, B \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ distinctes qui sont semblables.

(j) Une application $\mathbb{F}_2$-linéaire $\varphi : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$ avec rang$(\varphi) = 3$.

Exercice 3 (La trace)**.** *La trace d'une matrice carrée $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$, notée $\mathrm{tr}(A)$, est définie comme la somme des coefficients sur la diagonale et est une invariante par similitude (c.-à-d. deux matrices semblables ont la même trace). En particulier, on peut définir la trace d'un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.*

Étant donné une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$, montrez que le coefficient de x^{n-1} dans le polynôme caractéristique $c_A(x) \in K[x]$ est égal à $(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(A)$.

Exercice 4. *Soient V et W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soient $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ une base ordonnée de V et $C = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ une base ordonnée de W. Soit $T : V \to W$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire telle que la matrice de T par rapport aux deux bases données est la matrice A. Soient encore $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les bases ordonnées suivantes de V et W :*

$$\hat{B} = (2v_1 - v_2, v_2 + v_3 - v_4, v_3 + v_4, v_4) \text{ et } \hat{C} = (w_2, w_3, w_5, -w_1, -w_4).$$

Donner les matrices inversibles P et Q telles que

$$(QAP) \cdot [v]_{\hat{B}} = [T(v)]_{\hat{C}} \text{ pour tout } v \in V.$$

Exercice 5. *Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour trouver l'ensemble des solutions du système suivant d'équations linéaires à coefficients dans* $\mathbb{R}$*, pour tout choix du paramètre* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &= -\alpha \\ -x_2 + x_5 &= \alpha + 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 2\alpha \end{aligned}$$

Exercice 6. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base ordonnée* $B = ((1,2,3),(0,1,0),(0,0,-1))$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trouver toutes les valeurs propres de φ*.*

(b) Trouver une base de chaque espace propre de φ*.*

(c) Déterminer si φ *est diagonalisable. Si c'est le cas, trouver une matrice inversible* P *et une matrice diagonale* D *telles que* $P^{-1}AP = D$*.*

Exercice 7. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *une transformation linéaire et* $B = ((1,-1),(-1,2))$ *une base ordonnée de* $\mathbb{R}^2$*, telle que la matrice de* φ *par rapport à la base* B *soit*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculez $\varphi((x,y))$*. Notez qu'ici* $(x,y) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$*. Donc, on cherche les coordonnées de* $\varphi((x,y))$ *par rapport à la base canonique* (e_1, e_2)*.*

Exercice 8. *Considérez la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

(i) Trouvez une base du sous-espace $S = \{x \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,;\, A \cdot x = 0\}$ *de* $\mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$*.*

(ii) Si le vecteur $b \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ *est la somme des quatre colonnes de* A*, écrivez la solution complète de* $A \cdot x = b$*.*

Exercice 9. *Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, justifiez-les. Si elles sont fausses, expliquez-les ou donnez un contre-exemple.*

(1) Le déterminant est une application K*-linéaire de* $\mathbb{M}_{n\times n}(K)$ *dans* K*.*

(2) Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous les coefficients sur la diagonale sont non nuls.

(3) Deux matrices $A, B \in M_n(K)$ *sont semblables si et seulement si elles ont le même déterminant.*

(4) Deux matrices carrées ligne-équivalentes ont le même déterminant.

(5) Si une transformation K*-linéaire est trigonalisable, alors elle possède un vecteur propre.*

(6) Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ *est diagonalisable, alors elle possède* n *valeurs propres distinctes.*

(7) *Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ est trigonalisable, alors $aA^2 + bA + cI_n$ est aussi trigonalisable pour tous $a, b, c \in K^\times = K\backslash\{0\}$.*

(8) *Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ est trigonalisable, alors la somme des carrés de ses valeurs propres (répétitions comprises) est égale à $\mathrm{tr}(A^2)$.*

(9) *Un multiple scalaire d'un vecteur propre d'un endomorphisme K-linéaire est encore un vecteur propre.*

(10) *Si une matrice A est diagonalisable, alors toute matrice semblable à A est diagonalisable.*

(11) *Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(V, V)$. Si $v \in V$ est un vecteur propre commun de α et β, alors v est aussi un vecteur propre de $\alpha \circ \beta$. V*

(12) *Si λ est une valeur propre d'une transformation K-linéaire α, alors, pour tout entier $k \geq 1$, λ^k est une valeur propre de α^k.*

(13) *Soient $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ et $\alpha, \lambda \in K$. Si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda + \alpha$ est une valeur propre de la matrice $A + \alpha \cdot I_n$.*

(14) *Soient $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ et $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ des applications $\mathbb{C}$-linéaires diagonalisables. Alors il existe une base B de $\mathbb{C}^n$ telle que les matrices $[\varphi]_B$ et $[\psi]_B$ soient toutes deux diagonales.*

Exercice 10. *Questions à choix multiple. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.*

(a) *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_5)$ *et* $B = \begin{pmatrix} g & i-g & 2h-i \\ a & c-a & 2b-c \\ d & f-d & 2e-f \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_5)$. *Si* $\det(A) = \alpha$, *alors on a que* $\det(B) =$

- ☐ α
- ☐ 2α
- ☐ 3α
- ☐ 4α

(b) *Soit $b \in \mathbb{F}_7$ un paramètre. On considère le système suivant d'équations linéaires à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_7$.*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + b \cdot x_5 &= b \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= b \end{aligned}$$

Soit $S \subset (\mathbb{F}_7)^5$ l'ensemble des solutions du système. Alors :

- ☐ *Si S n'est pas vide, alors S possède un nombre infini d'éléments.*
- ☐ *S est non vide pour tout $b \in \mathbb{F}_7$.*
- ☐ *Si S est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{F}_7)^5$ alors $\dim(S) \geq 1$*
- ☐ *Si S est non vide, alors S est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{F}_7)^5$ de dimension 1.*

(c) *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par $\varphi(x, y) = (x - y, x + y, y)$. Considérez des bases ordonnées $B = ((1, 0), (0, -1))$ de $\mathbb{R}^2$ et $C = ((0, 0, 1), (0, -1, 0), (1, 1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$. Alors, la matrice de φ par rapport à ces bases est la matrice*

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- [ ] $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) *Considérons le système d'équations suivant :*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

On peut trouver une solution $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *d'un tel système en appliquant la méthode de Gauss à une matrice* $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *appropriée. La forme échelonnée réduite de cette matrice est la matrice :*

- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques est la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors l'image de φ *est engendrée par les vecteurs*

- [ ] $(1, 0, -1)$ *et* $(0, 1, 2)$.
- [ ] $(1, 0, 0)$ *et* $(0, 1, 0)$.
- [ ] $(1, 1, 1)$ *et* $(1, -1, 0)$.
- [ ] $(1, 0, 1)$ *et* $(0, 1, -2)$