

16 décembre 2025

Serie 13

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, calculer le polynôme caractéristique de $\alpha : V \rightarrow V$. Calculer la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de α .

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (2x + y, -y)$.
- (b) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.
- (c) $V = \mathbb{C}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.
- (d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère l'application de transposition $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie par $\alpha(A) = A^t \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

- (a) Déterminer la matrice de α par rapport à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ et calculer ses valeurs propres.
- (b) Déterminer les espaces propres correspondant à chaque valeur propre et trouver une base de chaque espace propre.
- (c) Montrer que α est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé et $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'application suivante :

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix}.$$

On admettra que α est une application \mathbb{R} -linéaire.

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de α et trouver ses valeurs propres.
- (b) Trouver les espaces propres correspondants.
- (c) Déterminer si α est diagonalisable. Le cas échéant, trouver une base formée de vecteurs propres et expliciter la formule de changement de base.

Exercice 4. Pour quelles valeurs de a et b la matrice $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.

- (a) Soit $\alpha : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un K -espace vectoriel V . On suppose que V est de dimension 5, que α possède exactement 4 valeurs propres distinctes, et que $\text{im}(\alpha)$ est de dimension 3. Montrer que α est diagonalisable.

- (b) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & C \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{C})$, où $C \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$ et $D \in M_3(\mathbb{C})$. Supposons que $c_A(t) = (t-2)^2 t^2 (t+1)$ et que $\text{rang}(D) = 2$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$.

- (a) Montrer que A est trigonalisable.
- (b) Trigonaliser A en explicitant la formule de changement de base.

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés et $n \geq 2$. On considère la matrice $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec

$$A_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j, \\ b & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

- (a) Montrer que $a - b$ est une valeur propre de A et trouver l'espace propre correspondant.
- (b) Montrer que le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ est un vecteur propre. Pour quelle valeur propre ?
- (c) Montrer que A est diagonalisable.
- (d) Trouver une base formée de vecteurs propres, et quand $n = 3$, expliciter la formule de changement de base.

Exercice 8. Soit $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ et $\alpha : V \rightarrow V$ définie par

$$\alpha(P(t)) = P(t) - (t + 1)P'(t).$$

Déterminer les valeurs propres de α et les espaces propres correspondants en indiquant une base pour chacun. L'application α est-elle diagonalisable ?