

09 décembre 2025

Serie 12

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, trouver toutes les valeurs propres de la transformations linéaire $\alpha : V \rightarrow V$, et tous les vecteurs propres associés.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (2x + y, -y)$.

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.

(c) $V = \mathbb{C}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.

(d) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

(e) $V = \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

(f) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle fermé $[a, b]$, $\alpha : V \rightarrow V$, $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

- (a) Trouver les valeurs propres de A .
- (b) Trouver des bases des sous-espaces propres de A .
- (c) Peut-on déduire de (a) si A est inversible ou non ?
- (d) Donner les valeurs propres de A^2 .
- (e) Donner des bases des sous-espaces propres de A^2 .

Exercice 3.

- (a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis déduire une formule qui permet de calculer A^{10} .
- (b) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A = PDP^{-1}$, puis calculer A^{10} en utilisant le point (a).

Exercice 4. Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 , dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T .
- (b) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à λ_i . Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
- (c) Ecrire la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base \mathcal{B}' .
- (d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.