

02 décembre 2025

Serie 11

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ telle que $A^{2026} + I_3 = 0$.

Exercice 2. Soit a un nombre complexe fixé. On considère les matrices complexes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le déterminant de A en développant par rapport à une ligne ou à une colonne.
- Refaire a) en utilisant des opérations élémentaires.
- La matrice A est-elle inversible?
- Calculer le déterminant de B et celui de B^2 .
- Soit p un nombre premier. Si on considère B comme une matrice à coefficients dans le corps fini \mathbb{F}_p à p éléments, pour quels nombres premiers p la matrice B est-elle de rang 6?

Exercice 3. Fixons K un corps. Soient $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$, $B \in \mathbb{M}_{n \times m}(K)$, $C \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ et $D \in \mathbb{M}_{m \times m}(K)$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $\alpha : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un K -espace vectoriel V . Soit λ une valeur propre de α . L'espace propre associé à λ est par définition $E_\lambda(\alpha) = \{v \in V \mid \alpha(v) = \lambda v\}$.

- Montrer que $E_\lambda(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de V .
- Montrer que $E_\lambda(\alpha) = \{\text{vecteurs propres correspondant à } \lambda\} \cup \{0\}$.
- Montrer que $E_\lambda(\alpha)$ est invariant par α .
- Soit μ une valeur propre de α , différente de λ . Montrer que $E_\lambda(\alpha) \cap E_\mu(\alpha) = \{0\}$.

Exercice 5. Soient V un K -espace vectoriel et $\phi \in \mathcal{L}(V, V)$. Soient $U, W \leq V$ des sous-espaces ϕ -invariants. Montrer que $W \cap U$ et $W + U$ sont aussi ϕ -invariants.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathcal{L}(V, V)$ une transformation linéaire d'un K -espace vectoriel V de dimension finie. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ker(\alpha^n)$ et $\text{im}(\alpha^n)$ sont invariants par α .

Exercice 7. Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 est

$$M = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de α et déterminer les valeurs propres de α et les espaces propres correspondants.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Trouver toutes les valeurs propres de A et les espaces propres associés.

Exercice 9. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base ordonnée $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ et soit $\alpha \in \mathcal{L}(V, V)$ telle que

$$[\alpha]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que $2f_1 - f_2$ est un vecteur propre de α et en déduire une valeur propre de α .
- (b) Montrer que -5 est une valeur propre de α .
- (c) Trouver $E_0(\alpha)$ et $E_{-5}(\alpha)$.