

25 novembre 2025

Serie 10

Exercice 1. Soient V et W des K -espaces vectoriels et soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Pour un sous-ensemble $Y \subset W$, posons $T^{-1}(Y) = \{v \in V \mid T(v) \in Y\}$. Montrer que si Y est un sous-espace vectoriel de W , alors $T^{-1}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de V .

Exercice 2. Écrire chacune des permutations suivantes sous la forme d'un produit de cycles disjoints et sous la forme d'un produit de transpositions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

(a) Soit $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$. Montrer que H est un sous-groupe de S_n .

(b) Trouver la signature des permutations suivantes :

$$(1 \ 2 \ 4 \ 5), \quad (1 \ 2)(3 \ 4)(1 \ 2 \ 6), \quad (1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ r),$$

où $r \geq 2$.

Exercice 4. Soit a un nombre réel fixé. On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour que A soit inversible et inverser A quand c'est possible.

(b) Inverser B si c'est possible.

Exercice 5. Sachant que

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants des matrices suivantes

$$T = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$