Algèbre Linéaire Avancée I
Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini
aline.zanardini@epfl.ch

Octobre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

Table des matières

Cours 8 (13 octobre)

On fixe un corps K et on considère V et W deux espaces vectoriels sur K.

1.1 Applications linéaires : définitions et exemples

Définition 1.1.1. Une application $\varphi : V \to W$ est dite **K-linéaire** si

(L1) φ est un morphisme de groupes (pour l'addition), et

(L2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v)$, pour tous $\lambda \in K$ et $v \in V$.

En plus,

- Une application K-linéaire de V dans V est aussi appelée un endomorphisme de V.
- Une application K-linéaire de V dans W qui est bijective s'appelle un isomorphisme de V dans W ou bien entre V et W. Et s'il existe un isomorphisme, $\varphi : V \to W$ on dit que les espaces V et W sont isomorphes.
- S'il est clair que nous parlons du corps K, on dit simplement une application linéaire.

Donc $\varphi : V \to W$ est une application K-linéaire si et seulement si

(L1) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, pour tous $u, v \in V$, et

(L2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v)$, pour tous $\lambda \in K$ et $v \in V$.

On observe que ces deux conditions se résument en une seule :

$$\varphi : V \to W \text{ est } K\text{-linéaire} \iff \varphi(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot \varphi(u) + \varphi(v), \text{ pour tous } \lambda \in K \text{ et } u, v \in V.$$

AZ: Notez qu'une transformation linéaire (non nulle) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, selon la définition ci-dessus, est tout simplement une fonction $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est une droite passant par l'origine.

On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.2. *Soit $\varphi; V \to W$ une application K-linéaire.*

(P1) On $\varphi(0_V) = 0_W$, et

(P2) $\varphi(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot \varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi(v_n)$.

En particulier, comme chaque élément de V s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des éléments d'une base de V, il suffit de connaître les valeurs de φ sur une base pour connaître l'application φ. En fait, on peut prouver le résultat suivant.

thm:fund

Théorème 1.1.3. *Supposons que V soit un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base ordonnée de V. Soit W un espace vectoriel sur le même corps K et soient $w_1, \ldots, w_n$ des vecteurs quelconques dans W. Alors, il existe exactement une application linéaire $\varphi : V \to W$ telle que $\varphi(v_i) = w_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$.*

Démonstration. Nous prouvons d'abord l'existence de l'application φ. Étant donné $v \in V$, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, déterminés de manière unique, tels que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$$

Pour ce vecteur on peut donc définir $\varphi(v) = \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_n \cdot w_n$. Comme v était arbitraire, nous obtenons ainsi une fonction $\varphi : V \to W$ qui est bien définie. Par définition, $\varphi(v_i) = w_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$ et on doit juste vérifier que φ est linéaire. Prenons des vecteurs $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$ et $v = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n$ dans V et de scalaire $\lambda \in K$. Alors,

$$\lambda u + v = (\lambda\alpha_1 + \beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n + \beta_n) \cdot v_n$$

et par définition on a que

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \alpha_1 \cdot w_1 + \ldots + \alpha_n \cdot w_n, \\ \varphi(v) &= \beta_1 \cdot w_1 + \ldots + \beta_n \cdot w_n. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u + v) &= (\lambda\alpha_1 + \beta_1) \cdot w_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n + \beta_n) \cdot w_n \qquad \text{(par définition !)} \\ &= \lambda(\alpha_1 \cdot w_1 + \ldots + \alpha_n \cdot w_n) + (\beta_1 \cdot w_1 + \ldots + \beta_n \cdot w_n) \\ &= \lambda\varphi(u) + \varphi(v). \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons l'unicité. Soit $\psi : V \to W$ une autre application linéaire telle que $\psi(v_i) = w_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$. Alors, si $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$ est un vecteur dans V quelconque, il faut nécessairement avoir

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) \\ &= \lambda_1 \cdot \psi(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot \psi(v_n) \\ &= \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_n \cdot w_n. \end{aligned}$$

Donc, $\psi = \varphi$. □

1.1.1 Quelques exemples

AZ: Je vous propose de regarder la vidéo « Linear transformations and matrices » sur la chaîne *3Blue1Brown*.

Exemple 1.1.4. Si V est un espace vectoriel quelconque, la transformation identité $\mathrm{id}_V : V \to V$ définie par $\mathrm{id}_V(v) = v$ (pour tous $v \in V$) est une transformation linéaire de V dans V. Également, la transformation nulle, définie par $v \mapsto 0_V$ (pour tous $v \in V$) est aussi un endomorphisme de V.

ample:diff **Exemple 1.1.5.** Si $V = K[x]$, l'application $D : K[x] \to K[x]$ définie par

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mapsto (D(f))(x) \coloneqq a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$$

est une application linéaire.

Exemple 1.1.6. Si $V = K[x]$ et nous fixons $f(x) \in K[X]$, l'application $\varphi_f : K[x] \to K[x]$ définie par

$$g(x) \mapsto f(x)g(x)$$

est une application linéaire.

Exemple 1.1.7. Considérons $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ comme $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Le morphisme de groupes (pour l'addition) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ définie par $a + b \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme ($\mathbb{R}$-linéaire). En effet,

(1) φ est bijective. $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b \cdot i$ est l'inverse.

(2) pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ on a que

$$\varphi(\lambda \cdot z) = \varphi(\lambda a + \lambda b i) = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \cdot \varphi(z)$$

Exemple 1.1.8. Les applications suivantes sont des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{M}_{n\times 1}(K) &\to K^n \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} &\mapsto (a_{11}, \ldots, a_{n1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{M}_{1\times n}(K) &\to K^n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix} &\mapsto (a_{11}, \ldots, a_{n1}) \end{aligned}$$

Exemple 1.1.9. Soit $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$. L'application $\varphi_A : \mathbb{M}_{n\times 1}(K) \to \mathbb{M}_{m\times 1}(K)$ définie par $X \mapsto AX$ est une application linéaire.

Également, l'application $\psi_A : \mathbb{M}_{1\times m}(K) \to \mathbb{M}_{1\times n}(K)$ définie par $v \mapsto vA$ est une application linéaire.

Exemple 1.1.10. Soit $\varphi : K^m \to K^n$. Le Théorème 1.1.3 nous dit que φ est uniquement déterminée par des vecteurs $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ tels que $v_i = \varphi(e_i)$ pour tous $1 \leq i \leq m$. En effet, si $u = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$, alors $\varphi(u) = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_m \cdot v_m$. En particulier, en écrivant $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, on a que

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Également, en écrivant $v_j = (b_{1j}, \ldots, b_{nj})$, on a que

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1.11. Soient $P \in \mathbb{M}_{m\times m}(K)$ et $Q \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$. L'application $\varphi : \mathbb{M}_{m\times n}(K) \to \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ définie par $A \mapsto PAQ$ est un endomorphisme.

Exemple 1.1.12. Si V est un K-espace vectoriel avec sous-espaces U et W tels que $V = U \oplus W$, alors la projection sur W parallèlement à U est l'application linéaire $\pi : V \to W$ définie par $\pi(u + w) = w$, pour tous $u \in U$ et $w \in W$. Définie comme telle, l'application est un endomorphisme, idempotent (c.-à-d.,$\pi \circ \pi = \pi$), d'image W et de noyau U.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Définition 1.2.1. On dénote par $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble des applications K-linéaires de V dans W. On munit $\mathcal{L}(V, W)$ d'une addition et d'une multiplication par scalaire somme suit :

- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$, alors $\varphi + \psi \in \mathcal{L}(V, W)$ est la application
$$v \mapsto \varphi(v) + \psi(v).$$
- Si $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda \cdot \varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ est la application
$$v \mapsto \lambda \cdot \varphi(v).$$

Nous pouvons donc montrer ce qui suit.

Proposition 1.2.2. *L'ensemble $\mathcal{L}(V, W)$ muni des opérations définies ci-dessus est un K-espace vectoriel. En plus, si $\dim(V) = n < \infty$ et $\dim(W) = m < \infty$, alors $\mathcal{L}(V, W)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$*

AZ: Il serait peut-être utile d'aborder ce résultat sous un autre angle. Si on définit l'addition et la multiplication par scalaire comme ci-dessus, alors l'ensemble de toutes les fonctions de V dans W devient un espace vectoriel sur le corps K. Cela n'a rien à voir avec le fait que V soit un espace vectoriel, mais seulement avec le fait que V est un ensemble non vide et que W est un K-espace vectoriel. Lorsque V est aussi un K-espace vectoriel, on peut parler des applications linéaires de V dans W, et la proposition stipule que les transformations linéaires forment un sous-espace de l'espace de toutes les fonctions de V dans W.

On peut également composer des applications linéaires, ce qui donne toujours une autre application linéaire. De plus, si une application linéaire est bijective, alors son inverse est également linéaire.

1.2.1 Le groupe linéaire général

Définition 1.2.3. On pose $\mathrm{GL}(V) = \mathcal{L}(V, V) \cap \mathrm{Bij}(V)$, l'ensemble de toutes les applications linéaires bijectives de V dans V. Alors $\mathrm{GL}(V)$ est un groupe avec la composition de fonctions comme opération binaire (= loi de composition interne). Ce groupe s'appelle le groupe général linéaire de V

1.3 Pour réfléchir chez-vous

Exercice 1.3.1. Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ une involution, c.-à-d., $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. Prouvez que les affirmations suivantes sont vraies.

(i) $V_+ := \{v \in V \mid \varphi(v) = v\}$ et $V_- := \{v \in V \mid \varphi(v) = -v\}$ sont des sous-espaces vectoriels de V.

(ii) $V = V_+ \oplus V_-$.

(iii) L'application linéaire définie par $\frac{1}{2}(\varphi + \mathrm{id}_V)$ est la projection sur V_+ parallèlement à V_-.

(iv) Quelle est l'interprétation géométrique si $V = \mathbb{R}^2$? Et si $V = \mathbb{R}^3$ et $\dim(V_+) = 2$?

Cours 9 (14 octobre)

Partout, soient K un corps, V et W des espaces vectoriels sur K, et $\varphi : V \to W$ une application K-linéaire.

2.1 Noyau, image et le théorème du rang

Définition 2.1.1 ((Rappel)).

(D1) L'image de φ est l'ensemble

$$\mathrm{im}(\varphi) := \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ avec } w = \varphi(v)\} \subset W.$$

On vérifie que $\mathrm{im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de W. Si $\mathrm{im}(\varphi)$ est de dimension finie, alors $\dim(\mathrm{im}(\varphi))$ s'appelle le rang de l'application φ.

(D2) Le noyau de φ est l'ensemble

$$\ker(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0_W\} \subset V.$$

C'est exactement le même ensemble qu'on a défini pour un morphisme de groupes. On vérifie aussi que $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de V (on sait déjà que c'est un sous-groupe du groupe $(V, +)$).

La proposition suivante nous dit que le noyau de φ détermine si φ est injective.

prop:inje

Proposition 2.1.2 (Critère d'injectivité). *L'application φ est injective si et seulement si* $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.

Démonstration. On suppose tout d'abord que φ est injective. Alors si $v \in \ker(\varphi)$, par définition, on a que $\varphi(v) = 0_W$. Mais comme $\varphi(0_V) = 0_W$ aussi, l'injectivité de φ implique que $v = 0_V$, et on conclut que $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.

Supposons maintenant que $\ker(\varphi) = \{0_V\}$. Soient $u, v \in V$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$. On a que

$$\begin{aligned}
\varphi(u - v) &= \varphi(u) - \varphi(v) \\
&= 0_W \\
&\Rightarrow u - v \in \ker(\varphi) \\
&\Rightarrow u - v = 0_V.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $u = v$ et φ est bien injective. □

cor:inje

Corollaire 2.1.3. *L'application φ est injective si et seulement si φ envoie chaque sous-ensemble linéairement indépendant de V en un sous-ensemble linéairement indépendant de W.*

Démonstration. On utilise la Proposition 2.1.2. Supposons que φ soit injective. Alors, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$. Prenons $X \subset V$ linéairement indépendant. Si $v_1, \ldots, v_k \in X$ on a que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot \varphi(v_1) + \ldots + \alpha_k \cdot \varphi(v_k) = 0_W &\Rightarrow \varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k) = 0_W \\
&\Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k = 0_V \\
&\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0
\end{aligned}$$

et les vecteurs $\varphi(v_1) + \ldots + \varphi(v_k)$ sont donc linéairement indépendants. Cet argument montre que l'image de X sous φ est une partie libre. En effet, si $w_1, \ldots, w_k \in \mathrm{im}(\varphi)$, alors il existe $v_1, \ldots, v_k \in X$ tels que $w_i = \varphi(v_i)$ pour chaque $1 \leq i \leq k$ et nous avons prouvé que

$$v_1, \ldots, v_k \text{ libres } \Rightarrow w_1 = \varphi(v_1), \ldots, w_k = \varphi(v_k) \text{ libres.}$$

Maintenant, supposons que φ envoie chaque sous-ensemble linéairement indépendant de V en un sous-ensemble linéairement indépendant de W. Soit v un vecteur non nul dans V. Alors, l'ensemble $X = \{v\}$ est libre. L'image de X, l'ensemble constitué du vecteur $\varphi(v)$, est donc libre. Par conséquent, $\varphi(v) \neq 0_W$. Ceci montre que $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ et il découle de la Proposition 2.1.2 que φ est injective. □

On aimerait un critère aussi clair pour déterminer si une application K-linéaire est surjective. Comme $\mathrm{im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel, si W est de dimension finie, φ est surjective si et seulement si $\dim(\mathrm{im}(\varphi)) = \dim(W)$. Le théorème suivant nous dit comment utiliser le noyau pour calculer le rang de l'application φ. C'est l'un des résultats les plus importants de l'algèbre linéaire.

Théorème 2.1.4 (Théorème du rang)**.** *Supposons que V soit de dimension finie. Alors*

$$\dim(\mathrm{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(V).$$

Démonstration. Soient $n = \dim(V)$, $k = \dim(\ker(\varphi))$ et $\{v_1, \ldots, v_k\}$ une base de $\ker(\varphi) \leq V$. Si $k = n$, alors φ est l'application nulle et il n'y a rien à prouver. Donc, on suppose $n > k$. Or, comme il s'agit de vecteurs linéairement indépendants dans V, nous savons que nous pouvons compléter cet ensemble en une base de V. Donc, il existe $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tels que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ est une base de V. Par conséquent, il suffit de démontrer que $\{\varphi(v_{k+1}), \ldots, \varphi(v_n)\}$ est une base de $\mathrm{im}(\varphi)$. Certainement, on a que $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ et comme $\varphi(v_j) = 0_W$ pour $j \leq k$ nous voyons que des vecteurs $\varphi(v_{k+1}), \ldots, \varphi(v_n)$ engendrent $\mathrm{im}(\varphi)$. Ainsi, on va juste montrer que ces vecteurs sont libres. Prenons des scalaires $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que

Notez qu'on a déjà prouvé que $k \leq n$

$$\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \cdot (\varphi(v_j)) = 0_W.$$

Alors, $\varphi\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \cdot v_j\right) = 0_W$ et le vecteur $v := \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \cdot v_j$ appartient à $\ker(\varphi)$. Maintenant, comme des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ forment une base de $\ker(\varphi)$, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, a_k \in K$ tels que $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k$. Mais alors on a que

$$v - v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i - \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \cdot v_j = 0_V,$$

et comme $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants, ça implique que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = -\lambda_{k+1} = \ldots = -\lambda_n = 0.$$

Donc, $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$; et, par conséquent, on déduit que des vecteurs $\varphi(v_{k+1}), \ldots, \varphi(v_n)$ sont linéairement indépendants. □

Corollaire 2.1.5. *Si* $\dim(V) > \dim(W)$*, alors* $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ *n'est pas injective.*

Démonstration. Puisque

$$\begin{aligned}\dim(\ker(\varphi)) &= \dim(V) - \dim(\mathrm{im}(\varphi)) \\ &\geq \dim(V) - \dim(W) \\ &> 0\end{aligned}$$

on déduit que $\ker(\varphi) \neq \{0_V\}$. □

Corollaire 2.1.6. *Si* $\dim(V) < \dim(W)$*, alors* $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ *n'est pas surjective.*

Démonstration. Puisque

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{im}(\varphi)) &= \dim(V) - \dim(\ker(\varphi)) \\ &\leq \dim(V) \\ &< \dim(W)\end{aligned}$$

on déduit que $\mathrm{im}(\varphi) \neq \{W\}$. □

cor:bije

Corollaire 2.1.7 (Critère de bijectivité)**.** *Supposons que* V *soit de dimension finie.*

(i) Si φ *est bijective, alors* W *est aussi de dimension finie et* $\dim(V) = \dim(W)$.

(ii) Si W *est aussi de dimension finie et* $\dim(V) = \dim(W)$*, alors* φ *est bijective si et seulement si* φ *est injective si et seulement si* φ *est surjective.*

Corollaire 2.1.8. *Si* V *est de dimension finie avec* $\dim(V) = n$*, alors* V *est isomorphe à* K^n.

Démonstration. Soit $L = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ une partie libre, complétons L (si nécessaire) en une base $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ de V et considérons la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de K^n. Le Théorème 1.1.3 nous dit qu'il existe exactement une application linéaire $\varphi : V \to K^n$ telle que $\varphi(v_i) = e_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$. Comme $\mathrm{im}(L) \subset \mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ est libre, on déduit que $\mathrm{im}(L)$ est libre et que cette application est donc injective par le Corollaire 2.1.3, donc bijective par le Corollaire 2.1.7. □

AZ: Notez que la démonstration du dernier Corollaire nous dit que chaque choix de base de V, avec un ordre particulier des vecteurs, définit un isomorphisme $V \xrightarrow{\simeq} K^n$. En fait, nous aurions pu également considérer n'importe quelle autre base de K^n...

2.2 Pour réfléchir chez-vous

Exercice 2.2.1. Prouvez que l'affirmation suivante est vraie : un système homogène d'équations linéaires avec plus de variables que d'équations possède des solutions non nulles.

Exercice 2.2.2. Considérez $V := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \;\middle|\; a_{ij} = \overline{a_{ji}} \right\}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^4 &\to V \\ (a, b, c, d) &\mapsto \begin{pmatrix} a+d & b+ci \\ b-ci & d-a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Prouvez que φ est une application linéaire bijective.

Cours 10 (15 octobre)

Fixons K, un corps, et V et W, des espaces vectoriels sur K. Rappelez-vous que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V et $\varphi : V \to W$ est linéaire, alors les valeurs de $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ déterminent les valeurs de φ sur des vecteurs arbitraires dans V. On va voir que les matrices constituent une méthode efficace pour enregistrer les valeurs des $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ en termes d'une base de W.

Définition 3.0.1. Une **base ordonnée** d'un K-espace vectoriel V de dimension finie ($= n$) est un n-uplet $(v_1, \ldots, v_n)$ ordonné, c'est-à-dire un élément du produit cartésien $V \times \ldots \times V$ (n copies), tel que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ soit une base de V.

Notez que si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base ordonnée de V, alors pour chaque $v \in V$ il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ de scalaires tel que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i.$$

À partir de maintenant, nous allons appeler x_i la i-ème coordonnée de v par rapport à la base ordonnée $\mathcal{B}$. En plus, il sera souvent plus pratique d'utiliser la matrice de coordonnées de V :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(K)$$

plutôt que le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de coordonnées. Pour indiquer la dépendance de cette matrice de coordonnées par rapport à la base, nous utiliserons le symbole $[v]_{\mathcal{B}}$.

⚠ Dans la suite, les espaces vectoriels seront de dimension finie et les bases seront des bases ordonnées.

AZ: En plus, j'utiliserai souvent l'isomorphisme $V \to \mathbb{M}_{n\times 1}(K)$ déterminé par une base ordonnée $\mathcal{B}$ de V et définie par $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$.

3.1 La matrice d'une application linéaire

Définition 3.1.1. Supposons que $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ soit une base de V et $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ soit une base de W. La matrice de φ par rapport à ces bases est la matrice dans $\mathbb{M}_{m\times n}(K)$, notée par $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, dont les coefficients a_{ij}sont définis par

$$\varphi(v_j) = a_{1,j} \cdot w_1 + \ldots + a_{m,j} \cdot w_m.$$

Si $V = W$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ on écrit simplement $[\varphi]_{\mathcal{B}}$.

3.1.1 Pourquoi définissons-nous la matrice comme cela ?

Posez $A = [\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ temporairement. Si $X = [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(K)$ est la matrice de coordonnées de v dans la base ordonnée $\mathcal{B}$, alors AX est la matrice de coordonnées du vecteur $\varphi(v)$ dans la base ordonnée $\mathcal{C}$, c'est-à-dire, $AX = [\varphi(v)]_{\mathcal{C}}$.

Pour mémoriser la construction de $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ à partir de φ, vous pouvez écrire en haut de la matrice les vecteurs dans l'espace de départ et à gauche les vecteurs dans l'espace d'arrivé, comme suit :

$$[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & \dots & v_j & \dots & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \dots & a_{1,j} & \dots & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & \dots & a_{m,j} & \dots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Ce qui est important à retenir, c'est que la j-ième colonne de $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est constituée des scalaires utilisés pour écrire $\varphi(v_j)$ comme une combinaison linéaire de $w_1, \dots, w_m$.

Nous pouvons résumer notre discussion sous la forme d'un théorème.

Théorème 3.1.2. *Soientt $\mathcal{B}$ une base ordonnée pour V et $\mathcal{C}$ une base ordonnée pour W. Pour chaque transformation linéaire $\varphi : V \to W$, il existe une matrice $A_\varphi = [\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ telle que*

$$[\varphi(v)]_{\mathcal{C}} = A_\varphi \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

De plus, $\varphi \mapsto A_\varphi$ est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(V, W)$ et $\mathbb{M}_{m\times n}(K)$.

AZ: ⚠ Il faut cependant noter qu'un tel isomorphisme dépend fortement des bases choisies.

Une autre aide visuelle précieuse à retenir est le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} {[v]_{\mathcal{B}}} & \mathbb{M}_{n\times 1}(K) \simeq K^n \arrow[r, "\text{mult.}", "\text{par } A_\varphi"'] & \mathbb{M}_{m\times 1}(K) \simeq K^m & {[\varphi(v)]_{\mathcal{C}}} \\ v \arrow[u, mapsto] & V \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{C}}"'] & \varphi(v) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

3.1.2 Quelques exemples

Exemple 3.1.3. Supposons que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ soit défini par

$$\varphi : (x, y) \mapsto (x + 3y, 2x + 5y, 7x + 9y).$$

Comme $(1, 0) \mapsto (1, 2, 7)$ et $(0, 1) \mapsto (3, 5, 9)$, la matrice de φ par rapport aux bases canoniques est la matrice ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.1.4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $K[x]_{\leq n}$ désigne l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans K et de degré au plus n. Considérons la base « standard » $1, x, \dots, x^n$. Supposons que $D \in \mathcal{L}(K[x]_{\leq 3}, K[x]_{\leq 2})$ soit l'application de différentiation définie dans l'Exemple 1.1.5. La matrice de D par rapport aux bases « standard » est la matrice ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Pour réfléchir chez-vous

Exercice 3.1.5. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit encore $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée de V. Nous avons prouvé qu'il existe un unique endomorphisme $\varphi : V \to V$ tel que $\varphi(v_j) = v_{j+1}$ pour tous $1 \leq j \leq n-1$ et $\varphi(v_n) = 0_V$. Quelle est la matrice $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$ de φ par rapport à la base ordonnée ? Montrez que $\varphi^n = 0$ mais $\varphi^{n-1} \neq 0$.

3.2 Changement de base et des matrices semblables

AZ: Je vous propose de regarder la vidéo « Change of basis » sur la chaîne *3Blue1Brown*.

Définition 3.2.1. Soient $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (w_1, \ldots, w_n)$ deux bases d'un K-espace vectoriel V. On exprime les v_i en termes de la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$v_j = p_{1j}w_1 + p_{2j}w_2 + \ldots + p_{nj}w_n.$$

On définit donc une matrice $P = (p_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ telle que la j-ième colonne de P est le vecteur colonne $[v_j]_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Cette matrice P s'appelle **la matrice de changement de base entre la base $\mathcal{B}$ et la base $\tilde{\mathcal{B}}$**. On dit aussi que P est la matrice de passage entre la base $\mathcal{B}$ et la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

On note que P est la matrice de l'application identité $\mathrm{id} : V \to V$, par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$; c'est-à-dire $P = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$. En particulier, P est nécessairement inversible et on a que

- $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ et
- $[v]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot [v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$,

pour chaque vecteur $v \in V$.

AZ: Parfois, il sera utile d'écrire $P_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$.

En utilisant ce qui précède, nous pouvons maintenant prouver ce qui suit.

Théorème 3.2.2. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$, soient $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ deux bases de V et soient $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ deux bases de V. Posons, $P = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$, $Q = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C},\tilde{\mathcal{C}}}$, $A_\varphi = [\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $\tilde{A}_\varphi = [\varphi]_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}}}$. Alors,*

$$\tilde{A}_\varphi = Q \cdot A_\varphi \cdot P^{-1}.$$

Démonstration. Supposons $\dim(V) = n$ et $\dim(W) = m$. La preuve découle du diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M}_{n\times 1}(K) \arrow[r, "P^{-1}"] & \mathbb{M}_{n\times 1}(K) \arrow[r, "A_\varphi"] & \mathbb{M}_{m\times 1}(K) \arrow[r, "Q"] & \mathbb{M}_{m\times 1}(K) \\
V \arrow[u, "\simeq_{\tilde{\mathcal{B}}}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_V"'] & V \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\varphi"'] & W \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{C}}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_W"'] & W \arrow[u, "\simeq_{\tilde{\mathcal{C}}}"]
\end{tikzcd}$$

□

Définition 3.2.3. Soient $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$. On dit que A et B sont <u>semblables</u> s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ telle que $PAP^{-1} = B$. On vérifie que « être semblable » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{M}_{n\times n}(K)$.

Les exemples clés de ce cours proviendront de l'observation suivante.

Remarque 3.2.4. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ et supposons que $\dim(V) = n$. Soient $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ deux bases de V. Alors les matrices $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ et $[\varphi]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ sont semblables. Cela découle du théorème précédent . Pouvez-vous voir pourquoi ?

3.2.1 Quelques exemples

Exemple 3.2.5. Considérons $\mathcal{B} = ((4,2),(5,3))$ et $\tilde{\mathcal{B}} = ((1,0),(0,1))$ deux bases (ordonnées) de $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2.6. Considérons $\mathcal{B} = ((2,4),(6,8))$ et $\tilde{\mathcal{B}} = ((7,3),(4,2))$ deux bases (ordonnées) de $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$[(2,4)]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [(6,8)]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 19 \end{pmatrix}$$

car $(2,4) = -6 \cdot (7,3) + 11 \cdot (4,2)$ et $(6,8) = -10 \cdot (7,3) + 19 \cdot (4,2)$. Donc,

$$P_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}.$$

Mais nous avons aussi que

$$P_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 10 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}.$$

Notez que pour trouver des scalaires $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(2,4) = x \cdot (7,3) + y \cdot (4,2)$ il faut résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 7x + 4y = 2 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases},$$

ce qui nous donne $x = -6$ et $y = 11$. Un raisonnement similaire s'applique aussi au deuxième vecteur de $\mathcal{B}$.

AZ: Avant de considérer des exemples plus intéressants dans des dimensions supérieures, nous devrons donc apprendre à résoudre des systèmes linéaires avec nombreuses équations...

Cours 11 (15 octobre)

4.1 Forme linéaires (covecteurs)

Si V est un espace vectoriel sur le corps K, on peut toujours considérer des transformations linéaires de V dans K. Une telle application $\varphi \in \mathcal{L}(V, K)$ est également appelée une forme linéaire. Rappelez-vous que cela signifie que φ est une fonction de V dans K telle que

$$\varphi(\alpha \cdot u + v) = \alpha \cdot \varphi(u) + \varphi(v)$$

pour tous les vecteurs u et v dans V et tous les scalaires α dans K. Le concept de forme linéaire est très important dans l'étude des espaces de dimension finie car il permet d'organiser et de clarifier la discussion sur les sous-espaces, les équations linéaires et les coordonnées.

Définition 4.1.1. Une forme linéaire sur V est un élément de $\mathcal{L}(V, K)$. On appelle $\mathcal{L}(V, K)$ l'espace dual de V et on le note V^*.

Exemple 4.1.2. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x + y + z \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4.1.3. Plus généralement, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires dans K, alors

$$\begin{aligned} \varphi : K^n &\to K \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur K^n. Il s'agit de la forme linéaire représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ relative à la base (ordonnée) canonique de K^n et à la base $\{1\}$ pour K. En fait, toute forme linéaire sur K^n est de cette forme, pour certains scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Exemple 4.1.4. Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$, sa trace est le scalaire

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Nous avons donc une forme linéaire $\mathrm{tr} : \mathbb{M}_{n \times n}(K) \to K$.

Exemple 4.1.5. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé sur la droite réelle et soit $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}([a, b]) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a, b])$.

4.1.1 Bases duales

Si V est de dimension finie, on peut obtenir une description assez explicite de l'espace dual V^*. Nous savons que $\dim(V) = \dim(V^*)$, alors les deux espaces sont isomorphes.

En effet, si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base ordonnée de V, alors d'après le Théorème 1.1.3, il existe (pour tout i) une unique forme linéaire $\varphi_i \in V^{a*}$ telle que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kroenecker). On obtient ainsi une base ordonnée $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de V^*. Cette base est appelée la **base duale de $\mathcal{B}$**. En plus,

- pour chaque forme linéaire $\varphi \in V^*$ on a que

$$\varphi = \varphi(v_1) \cdot \varphi_1 + \ldots + \varphi(v_n) \cdot \varphi_n,$$

- et pour chaque vecteur $v \in V$ on a que

$$v = \varphi_1(v) \cdot v_1 + \ldots + \varphi_n(v) \cdot v_n.$$

Autrement dit, si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base ordonnée de V et $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale, alors chaque φ_i est précisément la fonction qui assigne à chaque vecteur $v \in V$ la i–ème coordonnée de v par rapport à la base ordonnée $\mathcal{B}$.

AZ: Les formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont parfois appelées fonctions coordonnées. Elles sont aussi souvent notées $v_1^*, \ldots, v_n^*$.

4.1.2 Application transposée

Étant donnés deux espaces vectoriels V et W sur K et une application linéaire $T : V \to W$, nous allons maintenant introduire la notion d'application transposée qui nous permet de faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T^t(\psi)"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Définition 4.1.6. Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$, on appelle la transposée de T, noté T^t, l'application dans $\mathcal{L}(W^*, V^*)$ définie par

$$\begin{aligned} T^t : W^* &\to V^* \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ T : \underset{\in V}{v} \mapsto \underset{\in K}{\varphi(T(v))} \end{aligned}$$

Supposons $\dim(V) = n$ et $\dim(W) = m$ et fixons deux bases ordonnées $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ de V et W, respectivement. Considérons aussi les bases duales $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et $\mathcal{C}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$ correspondantes. On peut prouver ce qui suit.

Théorème 4.1.7.

(i) Soient $T \in \mathcal{L}(V, W)$ et $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ la matrice $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$. Alors, $a_{ij} = \psi_j(T(v_i))$.

(ii) En plus, la transpose de A est la matrice de l'application transposée T^t par rapport aux bases duales.

4.1.3 Hyperplans

Définition 4.1.8. Soit $H \leq V$ un sous-espace. On appelle H un hyperplan de V si H est égal au noyau d'une forme linéaire sur V non identiquement nulle.

Exemple 4.1.9. L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire $\varphi : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$.

Notons que dans un espace vectoriel de dimension n, un hyperplan est un sous-espace de dimension $n - 1$. En effet, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc de rang 1, d'après le théorème du rang, un hyperplan est donc de dimension $n - 1$. La réciproque est aussi vraie. Si $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ est une base d'un sous-espace $H \leq V$, alors on complète en une base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ de V et la forme linéaire φ définie par $\varphi(v_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n - 1$ et $\varphi(v_n) = 1$ est une forme linéaire non nulle dont le noyau est précisément H.

En d'autres termes, nous avons prouvé ce qui suit.

Proposition 4.1.10. *Soient V un espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de V. Alors H est un hyperplan de V si et seulement si* $\dim(H) = n - 1$.

Plus généralement, on peut montrer aussi que tout sous-espace de V de dimension k quelconque peut être décrit comme l'intersection de $n - k$ hyperplans.

Définition 4.1.11. Soit $U \leq V$ un sous-espace, on appelle **orthogonal** de U noté $U^\perp$ (ou, parfois, U°) l'ensemble

$$U^\perp := \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U,\ \varphi(u) = 0\}$$

On peut montrer que $U^\perp \leq V^*$ et que dans le cas où $\dim(V) = n$ on a que $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$. En fait, si $U \leq V$ et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k}\}$ est une base de $U^\perp$, on a que

$$u \in U \iff \begin{cases} \varphi_1(u) = 0 \\ \quad\vdots \\ \varphi_{n-k}(u) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, trouver une base pour $U^\perp$ implique, en pratique, de trouver un système linéaire à n inconnues et $n - k$ équations dont l'espace de solutions est exactement le sous-espace U. Il découle de ce même argument que trouver une base pour $U^\perp$ implique, en pratique, de trouver des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} \in V^*$ qui sont libres et telles que $U = \ker(\varphi_1) \cap \ldots \cap \ker(\varphi_{n-k})$. En bref, si $U \leq V$ est un sous-espace de dimension k et $\dim(V) = n$ alors il existe des hyperplans $H_1, \ldots, H_{n-k}$ tels que $U = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-k}$.

4.2 Pour réfléchir chez-vous

Exercice 4.2.1. Soient V et W des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K. Soit encore $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Montrer que

(i) $\ker(T^t) = \mathrm{im}(T)^\perp$ et

(ii) $\mathrm{im}(T^t) = \ker(T)^\perp$.

Exercice 4.2.2. Si $H \subset \mathbb{R}^n$ est un hyperplan, quelle est la description géométrique des sous-espaces complémentaires ? C'est-à-dire, si $\mathbb{R}^n = H \oplus L$, quelle est la description géométrique de L ?