

Algèbre Linéaire Avancée I

Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini
aline.zanardini@epfl.ch

Octobre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

Table des matières

1 Cours 6 (6 octobre)	1
1.1 De nouveaux sous-espaces à partir d'autres sous-espaces	1
1.2 (In)dépendance linéaire	4
1.2.1 Quelques exemples en plus de parties génératrices et de parties libres	5
1.2.2 Pour réfléchir chez-vous	5
2 Cours 7 (8 octobre)	5
2.1 Base et dimension	5
2.1.1 Quelques résultats en plus	6
2.2 Quelques exemples	9
2.2.1 Pour réfléchir chez-vous	9

Cours 6 (6 octobre)

1.1 De nouveaux sous-espaces à partir d'autres sous-espaces

Si V est un K -espace vectoriel et $U, W \leq V$ sont des sous-espaces, alors leur somme et leur intersection sont également des sous-espaces.

Proposition 1.1.1. Soient V un espace vectoriel sur un corps K et $U, W \subset V$ deux sous-espaces. Alors

- (i) $U \cap W$ est un sous-espace vectoriel de V et,
- (ii) également, $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ est un sous-espace vectoriel de V .
 - Dans le cas où $U \cap W = \{0_V\}$ on parle de la **somme directe** de U et W et on écrit $U \oplus W$.

Démonstration.

(i) Tout d'abord on observe que $U \cap W \neq \emptyset$ car $0_V \in U$ et $0_V \in W$. Il suffit donc de montrer que

$$\lambda \in K, a, b \in U \cap W \Rightarrow \lambda \cdot a + b \in U \cap W.$$

Prenons $\lambda \in K$ et $a, b \in U \cap W$. Comme $a, b \in U$ et U est un sous-espace vectoriel, nous savons que (Proposition 1.1.10, Cours 5) $\lambda \cdot a + b \in U$. Similairement, comme $a, b \in W$ et W est un sous-espace vectoriel, on a que $\lambda \cdot a + b \in W$. Mais alors, ça implique que $\lambda \cdot a + b \in U \cap W$ et, en utilisant Proposition 1.1.10 (cours 5) encore une fois, on déduit que $U \cap W$ est un sous-espace vectoriel.

(ii) Nous observons également que $U + W \neq \emptyset$ car $0_V \in U \cap W$ et donc $0_V = 0_V + 0_V \in U + W$. Or, si $\lambda \in K$ et $a, b \in U + W$ alors il existe $u_1, u_2 \in U$ et $w_1, w_2 \in W$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda \cdot a + b &= \lambda \cdot \underbrace{(u_1 + w_1)}_{=a} + \underbrace{(u_2 + w_2)}_{=b} \\ &= (\lambda \cdot u_1 + u_2) + (\lambda \cdot w_1 + w_2), \end{aligned}$$

mais comme U et W sont des sous-espaces vectoriels, on a que $\lambda \cdot u_1 + u_2 \in U$ et que $\lambda \cdot w_1 + w_2 \in W$, et donc ce qui précède signifie que $\lambda \cdot a + b \in U + W$. □

Exemple 1.1.2. Soient V un K -espace vectoriel et $X \subset V$ une partie de V . Considérons l'intersection de tous les sous-espaces de V qui contiennent le sous-ensemble X . On pose $\mathcal{S} := \{U \leq V \mid X \subset U\}$ et on considère :

$$\text{Vect}(X) := \bigcap_{U \in \mathcal{S}} U.$$

On vérifie que $\text{Vect}(X)$ est bien un sous-espace de V , appelé le sous-espace engendré par la partie X . En fait, on peut montrer que $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (Définition 1.2.1 (D1) ci-dessous) de vecteurs de X .

AZ: ⚠ Notez que $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

Exemple 1.1.3. Soient K un corps et V l'espace de toutes les matrices 2×2 à coefficients dans K . Soient $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\} \leq V$ et $W = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \right\} \leq V$. Alors, $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \leq V$ et $U + W = V$.

Exemple 1.1.4. Soit $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et considère les sous-espaces $V_p = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$ (fonctions paires) et $V_i = \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$ (fonctions impaires). Alors, $V = V_p \oplus V_i$.

On peut bien sûr généraliser aussi la définition de somme et de somme directe au cas de plus de deux sous-espaces. Plus généralement, la définition est la suivante.

Définition 1.1.5. Soient V un K -espace vectoriel et W_1, \dots, W_k des sous-espaces vectoriels de V .

(i) On dénote par $W_1 + \dots + W_k$ l'ensemble $\{w_1 + \dots + w_k \mid w_i \in W_i, \forall 1 \leq i \leq k\}$.

(ii) On dit qu'un sous-espace U de V est la somme directe de W_1, \dots, W_k et on écrit $U = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ si

(ii-a) $U = W_1 + \dots + W_k$, et

(ii-b) $W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = \{0_V\}$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Le résultat suivant caractérise les sommes directes.

Théorème 1.1.6. Soient W_1, \dots, W_k, U des sous-espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel V avec $W_i \subset U$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $U = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

(ii) Chaque vecteur $u \in U$ peut être écrit de façon unique comme $u = w_1 + \dots + w_k$, avec $w_i \in W_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii) Par définition, chaque $u \in U$ s'écrit comme $u = w_1 + \dots + w_k$, il faut vérifier l'unicité d'une telle décomposition. Supposons qu'on peut écrire

$$u = w_1 + \dots + w_k = \tilde{w}_1 + \dots + \tilde{w}_k,$$

pour certains $w_i, \tilde{w}_i \in W_i, 1 \leq i \leq k$. Alors, pour chaque i on a que

$$w_i - \tilde{w}_i = \sum_{j \neq i} (\tilde{w}_j - w_j).$$

Or, ce vecteur appartient à la fois à W_i et à la somme $\sum_{j \neq i} W_j$, donc à l'intersection $W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right)$.

On en déduit que $w_i - \tilde{w}_i = 0_V$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et que l'écriture est unique.

(ii) \Rightarrow (i) Par hypothèse, $U \subset W_1 + \dots + W_k$. De plus, comme $W_i \subset U$ pour tout i et $U \leq V$ on a aussi

que $W_1 + \dots + W_k \subset U$. Montrons que $W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = \{0_V\}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Fixons

$1 \leq i \leq k$ quelconque et prenons $v \in W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) \subset W_1 + \dots + W_n$. Alors, d'une part

$$v = 0 + \dots + 0 + \underbrace{v}_{\in W_i} + 0 + \dots + 0,$$

et d'autre part

$$v = w_1 + \dots + w_{i-1} + 0 + w_{i+1} + \dots + w_k,$$

pour certains $w_j \in W_j$. Comme l'écriture est unique, on déduit que $v = 0$.

□

1.2 (In)dépendance linéaire

On fixe un corps K et un K -espace vectoriel V .

Définition 1.2.1.

(D1) Soient $v_1, \dots, v_k \in V$ des vecteurs. Une **combinaison linéaire** de v_1, \dots, v_k est un vecteur $v \in V$ qui peut être écrit comme $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k$ pour certains scalaires $\lambda_i \in K$.

(D2) $X \subset V$ s'appelle un **système** générateur, ou une **partie génératrice** de V si $V = \text{Vect}(X)$ (voir l'Exemple 1.1.2).

Autrement dit, $\emptyset \neq X \subset V$ est une partie génératrice de V si et seulement si tout $v \in V$ est une combinaison linéaire de vecteurs dans X .

(D3) Soient $v_1, \dots, v_k \in V$. On dit que v_1, \dots, v_k sont **liés**, ou **linéairement dépendants**, s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0_V.$$

Cela signifie donc que l'un des v_i est une combinaison linéaire de toutes les autres v_j , $j \neq i$.

(D4) Par contre, si v_1, \dots, v_k sont distincts et on ne peut pas trouver des scalaires λ_i comme ci-dessus, on dit que ces vecteurs sont **libres**, ou **linéairement indépendants**.

Autrement dit, v_1, \dots, v_k sont libres s'ils ne sont pas liés. Ce qui signifie que toute égalité

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0_V$$

implique que $\lambda_i = 0$ pour tout i .

(D5) Une partie $X \subset V$ est dite liée, ou linéairement dépendante, s'il existe $v_1, \dots, v_k \in X$ distincts qui sont liés. Sinon, la partie est dite libre ou linéairement indépendante.

AZ: Je vous propose de regarder la vidéo « Linear combinations, span, and basis vectors » sur la chaîne [3Blue1Brown](#).

Voici quelques conséquences directes de ces définitions.

- Tout ensemble contenant un ensemble linéairement dépendant est linéairement dépendant.
- Tout sous-ensemble d'un ensemble linéairement indépendant est linéairement indépendant.
- Tout ensemble contenant le vecteur nul est linéairement dépendant car $1_K \cdot 0_V = 0_V$. En particulier, chaque liste de vecteurs dans V contenant le vecteur nul est linéairement dépendante.
- Une partie $X \subset V$ est linéairement indépendante si et seulement si chaque sous-ensemble fini de X est linéairement indépendant, c'est-à-dire si et seulement si pour tout vecteur distinct v_1, \dots, v_k , de X , $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0_V$ implique que chaque $\lambda_i = 0$.
- Des vecteurs v_1, \dots, v_k sont linéairement indépendants si et seulement si chaque vecteur de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ n'a qu'une seule représentation sous forme de combinaison linéaire de v_1, \dots, v_k .
- La partie vide est donc linéairement indépendante.

Exemple 1.2.2.

- (i) Pour chaque $v \in V$, le sous-ensemble $\{v\}$ est linéairement indépendant si et seulement si le vecteur v n'est pas nul.
- (ii) Deux vecteurs distincts dans un espace vectoriel sont linéairement indépendants si et seulement si aucun des deux vecteurs n'est un multiple scalaire de l'autre.

1.2.1 Quelques exemples en plus de parties génératrices et de parties libres

- Dans l'espace vectoriel $K[x]$, l'ensemble $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ est un système générateur.
- Dans l'espace K^3 , $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est une partie génératrice.
- Dans l'espace \mathbb{R}^2 , $\{(1, -2), (3, 2), (1, 5), (-4, 1)\}$ est un système générateur.
- La partie vide $\emptyset \subset V$ est libre.
- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble $\{\sin x, \cos x\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.
- Dans \mathbb{R}^2 , les vecteurs $(1, -2)$ et $(3, 2)$ sont libres et le sous-ensemble $\{(1, -2), (3, 2)\}$ est donc libre aussi.

Ici 1 désigne 1_K et 0 désigne 0_K

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{M}_{n \times 1}(K)$ qui est linéairement indépendant.

1.2.2 Pour réfléchir chez-vous

- À quoi ressemblent les vecteurs linéairement dépendants dans \mathbb{R}^2 ? Et dans \mathbb{R}^3 ?
- Quelle est la plus petite cardinalité d'une partie génératrice de \mathbb{R}^4 ?

Cours 7 (8 octobre)

2.1 Base et dimension

Partout, K désignera un corps et V un K -espace vectoriel.

Définition 2.1.1. Une partie $X \subset V$ s'appelle une **base** si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

(B1) X est une partie génératrice de V , et

(B2) X est une partie linéairement indépendante.

L'espace vectoriel V est dit de **dimension finie** si V possède un système générateur fini, ou de manière équivalente, si V possède une base finie (voir Théorème 2.1.5 ci-dessous).

AZ: **▲** Dans ce cours, on va admettre sans preuve que tout K -espace vectoriel possède une base. Si $V = \{0\}$ la base est la partie \emptyset . Si $V \neq \{0\}$, il existe un sous-ensemble propre $X \subset V$ qui est linéairement indépendant (par exemple, chaque sous-ensemble de la forme $\{v\}$ avec $v \neq 0$). On peut montrer qu'il existe un sous-ensemble maximal linéairement indépendant de V qui contient X et qu'en plus cette partie maximale sera forcément une base (voir aussi Lemme 2.1.8 ci-dessous).

Proposition 2.1.2. *Supposons $V \neq \{0\}$. Une partie $X \subset V$ est une base de V si et seulement si pour tout $v \in V \setminus \{0_V\}$ il existe un nombre fini de vecteurs v_1, \dots, v_n et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K^\times$, uniquement déterminés, tels que $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$.*

AZ: **▲** Ici, je suppose que des vecteurs v_1, \dots, v_n sont distincts.

Démonstration.

(\Rightarrow) Si X est une base, par définition X est une partie génératrice et donc tout $v \in V$ est une combinaison linéaire de vecteurs dans X . Il suffit de vérifier l'unicité de l'expression. Supposons

$$0_V \neq v = \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_k \cdot u_k = \beta_1 \cdot w_1 + \dots + \beta_m \cdot w_m,$$

pour certains scalaires $\alpha_i, \beta_j \in K$ et certains vecteurs u_i, w_j . En rajoutant des termes à coefficients nuls, on peut supposer que

$$v = \gamma_1 \cdot v_1 + \dots + \gamma_n \cdot v_n = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

Alors, $\sum_{k=1}^n (\gamma_k - \lambda_k) \cdot v_k = 0_V$ et comme X est libre, $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre aussi, et on déduit que $\gamma_k = \lambda_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Par conséquent, les α s sont égaux aux β s et les u s sont égaux aux w s.

(\Leftarrow) Tout d'abord, notez que X est une partie génératrice et comme $V \neq \{0\}$, $X \neq \emptyset$. Donc, il existe $0_V \neq v \in X$. En plus, $0_V \notin X$ car sinon on a $v = 1 \cdot v = 1 \cdot v + 1 \cdot 0_V$, ce qui contredit l'unicité de l'expression. On doit juste montrer que X est libre.

Supposons le contraire. Il existe donc une partie finie de vecteurs distincts $\{v_1, \dots, v_n\} \subset X$ qui n'est pas libre. Donc, il existe aussi des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\lambda_1 \neq 0$ et on peut écrire

$$V \ni -\lambda_1 \cdot v_1 = \underbrace{-\lambda_1}_{\in K^\times} \cdot \underbrace{v_1}_{\in X} = \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n.$$

Ainsi, soit $-\lambda_1 \cdot v_1 = 0_V$, soit l'un des autres scalaires est également différent de zéro. Par l'unicité de l'écriture, on déduit que le vecteur $-\lambda_1 \cdot v_1$ doit être le vecteur nul. Mais cela implique que $v_1 = 0_V$ car $\lambda_1 \neq 0$, ce qui est contradictoire puisque $0_V \notin X$. □

Corollaire 2.1.3. *Supposons que $\{v_1, \dots, v_n\}$ soit une base de V . Alors $V = \text{Vect}(v_1) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(v_n)$.*

2.1.1 Quelques résultats en plus

Lemme 2.1.4. *Supposons que v_1, \dots, v_m soient linéairement dépendants. Alors, il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que $v_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$. De plus, pour tel k , si le k -ième vecteur v_k est supprimé de $\{v_1, \dots, v_m\}$, alors le sous-espace engendré par les vecteurs restants est égal à $\text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$.*

Démonstration. Comme v_1, \dots, v_m sont linéairement dépendants, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, non tous nuls, tels que $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m \cdot v_m = 0$. Soit k le plus grand élément de $\{1, \dots, m\}$ tel que $\alpha_k \neq 0$. Alors $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \cdot v_i$, où $\beta_i := -\alpha_k^{-1} \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$, ce qui prouve que $v_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$.

Maintenant, supposons que $v \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$. Alors il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in K$ tels que

$$v = \gamma_1 \cdot v_1 + \dots + \gamma_m \cdot v_m.$$

Dans cette équation, on peut remplacer v_k par $\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \cdot v_i$, ce qui montre que v est dans le sous-espace engendré par les vecteurs v_j avec $j \neq k$. □

Théorème 2.1.5. *Si $V \neq \{0\}$ est engendré par une partie finie $\{v_1, \dots, v_n\}$, c.-à-d., s'il existe un nombre fini (> 0) de vecteurs $v_1, \dots, v_n \in V$ tels que $V = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, alors toute partie $X \subset V$ linéairement indépendante est finie et ne contient pas plus de n éléments. (c.-à-d., $|X| \leq n$).*

Preuve 1. Soient $w_1, \dots, w_k \in V$ des vecteurs linéairement indépendants quelconques. Il suffit de montrer que $k \leq n$. Comme $w_1 \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = V$, les vecteurs w_1, v_1, \dots, v_n sont linéairement dépendants. En utilisant le Lemme 2.1.4, on peut supposer, sans perte de généralité, que $V = \text{Vect}(w_1, v_2, \dots, v_n)$, c.-à-d. qu'on remplace v_1 par w_1 . Notez que $w_1 \neq 0$! Maintenant, comme $w_2 \in \text{Vect}(w_1, v_2, \dots, v_n) = V$, les vecteurs $w_1, w_2, v_2, \dots, v_n$ sont linéairement dépendants; et comme $w_2 \notin \text{Vect}(w_1)$, en utilisant le Lemme 2.1.4 encore une fois, on peut supposer que $V = \text{Vect}(w_1, w_2, v_3, \dots, v_n)$. En procédant ainsi, après l'étape k (éventuellement après avoir réorganisé les vecteurs) nous aurons remplacé v_1, \dots, v_k par w_1, \dots, w_k . À chaque étape, le Lemme 2.1.4 implique qu'il y a un certain v_j à supprimer. Il y a donc au moins autant de v s que de w s. □

Preuve 2. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que tout sous-ensemble X de V contenant plus de n vecteurs est linéairement dépendant. Soit X un tel ensemble. Dans X , il existe donc des vecteurs distincts w_1, \dots, w_k avec $k > n$; et comme $V = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, il existe aussi des scalaires $\lambda_{ij} \in K$ tels que

$$w_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} v_i.$$

Prenons maintenant k scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ quelconques. Alors

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot w_1 + \dots + \alpha_k \cdot w_k &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot w_j = \sum_{j=1}^k \left(\alpha_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} v_i \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{ij} \alpha_j \right) \cdot v_i \end{aligned}$$

et il suffit de montrer que nous pouvons toujours trouver des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, non tous nuls, tels que $\left(\sum_{j=1}^k \lambda_{ij} \alpha_j \right) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci est vrai car tout système homogène de n équations linéaires avec $k > n$ inconnues a une solution non triviale. □

Corollaire 2.1.6. Si V est de dimension finie, deux bases quelconques de V ont le même nombre (fini) d'éléments.

Si V est de dimension finie, on peut donc parler de sa dimension. Si V possède une base avec n éléments on écrit $\dim(V) = n$.

Corollaire 2.1.7. Si V est de dimension finie et $\dim(V) = n$, alors

- (i) chaque sous-ensemble de V contenant plus de n vecteurs est linéairement dépendant ;
- (ii) aucun sous-ensemble de V contenant moins de n vecteurs ne peut engendrer V .

Nous admettrons que le sous-espace nul a une dimension nulle.

Lemme 2.1.8. Soit $X \subset V$ un sous-ensemble linéairement indépendant. Supposons que w soit un vecteur de V qui ne soit pas dans le sous-espace engendré par X . Alors, l'ensemble $X \cup \{w\}$ obtenu en adjoignant w à X est linéairement indépendant.

Démonstration. Considérons $v_1, \dots, v_n \in X$ distincts. Si

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n + \beta \cdot w = 0,$$

alors $\beta = 0$. Sinon,

$$w = \sum_{i=1}^n (-\beta^{-1} \alpha_i) \cdot v_i \Rightarrow w \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{Vect}(X).$$

Ainsi $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0$, et puisque X est une partie linéairement indépendante, chaque $\alpha_i = 0$. Par conséquent, puisque les vecteurs v_i étaient arbitraires, cela signifie que nous ne pouvons pas trouver un nombre fini de vecteurs (distincts) dans $X \cup \{w\}$ qui soient linéairement dépendants. Par définition, $X \cup \{w\}$ est donc linéairement indépendant. \square

Théorème 2.1.9 (de la base incomplète). Supposons que V soit de dimension finie. Soit $L \subset V$ une partie libre (= linéairement indépendante). Alors, L peut être complété en une base de V . En plus, si $|L| = \dim V$, alors L est une base.

Démonstration. Nous complétons L en une base de V comme suit. Si $V = \text{Vect}(L)$, il n'y a rien à faire. Sinon, il existe $w \in V \setminus \text{Vect}(L)$. Maintenant, le Lemme 2.1.8 nous dit que $L \cup \{w\}$ est linéairement indépendant. Si $V = \text{Vect}(L \cup \{w\})$, on s'arrête. Sinon on peut procéder de cette façon (en pas plus de $\dim(V)$ étapes) jusqu'à obtenir une base pour V . Le processus doit nécessairement se terminer par le Théorème 2.1.5, voir aussi Corollaire 2.1.7. \square

Notez que ceci est vrai si et seulement si $|L| = \dim(V)$, voir Corollaire 2.1.7

Corollaire 2.1.10. Soit $W \leq V$ un sous-espace propre. Alors, W est de dimension finie et $\dim W < \dim V$. En plus, toute base de W peut être complétée en une base de V . En particulier, il existe $U \leq V$ tel que $V = U \oplus W$ et $\dim V = \dim U + \dim W$.

AZ: En général, $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

2.2 Quelques exemples

Exemple 2.2.1. Dans l'espace $V = K^n$ on peut considérer des vecteurs e_1, \dots, e_n défini par

$$\begin{aligned}e_1 &:= (1, 0, 0, \dots, 0) \\e_2 &:= (0, 1, 0, \dots, 0) \\&\vdots \\e_n &:= (0, 0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

La partie $\{e_1, \dots, e_n\} \subset K^n$ est une base, appelée base canonique.

Exemple 2.2.2. Les parties $\{(1, 2), (3, 5)\}$ et $\{(7, 5), (-4, 9)\}$ sont des bases de \mathbb{R}^2 .

Exemple 2.2.3. La partie $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ est une base de

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \leq \mathbb{R}^3.$$

Exemple 2.2.4. Soit $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ une matrice inversible. Alors, les colonnes de la matrice A forment une base de $V = \mathbb{M}_{n \times 1}$. De manière similaire, les lignes forment une base de $\mathbb{M}_{1 \times n}$.

2.2.1 Pour réfléchir chez-vous

Exercice 2.2.5. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ et $v_3 = (0, -3, 2)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et exprimer chacun des vecteurs dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ comme une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 .

Exercice 2.2.6. Trouvez trois vecteurs dans \mathbb{R}^3 qui sont linéairement dépendants et tels que deux d'entre eux, n'importe lesquels, soient linéairement indépendants.

Exercice 2.2.7. Soit $V = \mathbb{M}_{2 \times 2}(K)$ et considérons des sous-espaces $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} \right\} \leq V$ et $W = \left\{ \begin{pmatrix} d & e \\ -d & f \end{pmatrix} \right\} \leq V$. Trouver les dimensions de U et de W et des sous-espaces $U + W$ et $U \cap W$.

Exercice 2.2.8.

- (i) Soit $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 = 3a_2 \text{ et } a_3 = 7a_4\} \leq \mathbb{R}^5$. Trouver une base de U .
- (ii) Complétez la base de (i) en une base de \mathbb{R}^5 .
- (iii) Trouver un sous-espace $W \leq \mathbb{R}^5$ tel que $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.