Algèbre Linéaire Avancée I
Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini
aline.zanardini@epfl.ch

Septembre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

Table des matières

Cours 5 (24 septembre)

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1. Soit K un corps. Un **K-espace vectoriel** est un ensemble non vide V munis de deux lois :

(E1) une loi interne $+ : V \times V \to V$ telle que $(V, +)$ est un groupe abélien ; et

(E2) une loi externe $\cdot : K \times V \to V$ telle que pour tous $u, v \in V$ et pour tous $\lambda, \mu \in K$ on a que
- $1_K \cdot v = v$,
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
- $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$, et
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Si V est un K-espace vectoriel , ses éléments s'appellent les vecteurs et les éléments de K s'appellent les scalaires. On parle de l'addition de vecteurs et de la multiplication par un scalaire. On notera l'élément neutre du groupe $(V, +)$ par 0 (ou 0_V si nécessaire) et l'inverse de $v \in V$ par $-v$.

on peut aussi dire espace vectoriel sur K

1.1.1 Premières propriétés

Proposition 1.1.2. *Soit V un K-espace vectoriel et soient encore $\lambda \in K$ et $v \in V$. Alors,*

(i) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$,

(ii) $0_K \cdot v = 0_V$,

(iii) $\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow (\lambda = 0_K) \vee (v = 0_V)$, *et*

(iv) $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$.

Démonstration. Soient $\lambda \in K$ et $v \in V$.

(i) $0_V + \lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V$ et en simplifiant à droite on obtient $\lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(ii) $0_V + 0 \cdot v = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$ et on conclut comme dans (i).

(iii) Si $\lambda = 0$ il n'y a rien à prouver donc supposons que $\lambda \neq 0$. Alors, il existe $\lambda^{-1} \in K$ et on a que

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot v = 0_V &\Rightarrow \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0_V \\
&\Rightarrow (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = 0_V \\
&\Rightarrow 1 \cdot v = 0_V \\
&\Rightarrow v = 0_V
\end{aligned}$$

(iv) On observe que

$$(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0 \cdot v = 0_V$$

et que

$$\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (-v + v) = \lambda \cdot 0_V = 0_V.$$

Donc, par l'unicité des inverses on a $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$. Notez que, par définition, $(V, +)$ est un groupe abélien.

□

1.1.2 Exemples

Exemple 1.1.3 (Le plus petit)**.** L'exemple le plus simple d'espace vectoriel est l'espace nul $V = \{0\}$, qui ne contient que le vecteur nul. On va voir que tout K-espace vectoriel contient un sous-espace vectoriel isomorphe à celui-ci.

Exemple 1.1.4 (Espace des n-uplets)**.** Soit K un corps et V le produit cartésien $K \times \ldots \times K$ (n fois) qu'on notera K^n. Nous pouvons munir V d'une structure d'espace vectoriel comme suit. Si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ appartiennent à K^n, et $\lambda \in K$, les deux lois sont définies par :

- $u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$, et
- $\lambda \cdot v = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n)$.

En particulier, tout corps peut être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.

Exemple 1.1.5 (Espace des polynômes)**.** Soit $K[x]$ l'anneau de polynômes à coefficients dans un corps K. Alors $(K[x], +)$ est un groupe abélien et on peut définir une loi externe, la multiplication par un scalaire, comme suit. Si $\lambda \in K$ et $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]$, on pose

$$\lambda \cdot f := \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \ldots + \lambda a_n x^n.$$

Avec ces opérations, $K[x]$ devient un espace vectoriel sur K.

Exemple 1.1.6 (Espace des fonctions)**.** Soit E un ensemble non vide quelconque. Si K est un corps, l'ensemble $\mathcal{F}(E,K)$ de toutes les applications de E dans K est un anneau. En particulier, $(\mathcal{F}(E,K),+)$ est un groupe abélien et on définit une loi externe par : pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $f \in \mathcal{F}(E,K)$ on pose

$$\lambda \cdot f \coloneqq E \ni x \mapsto \lambda \cdot \underbrace{f(x)}_{\in K} \in K.$$

Je vous laisse comme exercice de vérifier que $\mathcal{F}(E,K)$ muni de ces opérations est un K-espace vectoriel.

Exemple 1.1.7 (Espace des matrices)**.** Rappelez-vous qu'une matrice $n \times m$ à coefficients dans un corps K est un tableau à n-lignes et m colonnes constituées d'éléments de K :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\mathbb{M}_{n\times m}(K)$ de toutes ces matrices peut être muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$ comme suit. Soient $A, B \in \mathbb{M}_{n\times m}(K)$, avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et soit encore $\lambda \in K$. On définit

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, et
- $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$.

On peut vérifier que $\mathbb{M}_{n\times m}(K)$ muni de ces opérations est un K-espace vectoriel.

Exemple 1.1.8 (Espace des solutions d'un système linéaire)**.** Soit K un corps et $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times m}(K)$. Considérez le système de n équations dans les variables $x_1, \dots, x_m$:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

On dit que $(v_1, \dots, v_m) \in K^m$ est une solution du système si pour tout $1 \leq i \leq n$ on a que

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}v_j = a_{i1}v_1 + \dots + a_{im}v_m = 0.$$

Les restrictions des deux lois $+$ et $\cdot$ (sur K^m) au sous-ensemble

$$W_A \coloneqq \{(v_1, \dots, v_m) \in K^m \mid (v_1, \dots, v_m) \text{ est solution de } (*)\}$$

font de W_A un K-espace vectoriel. Autrement dit, $W_A \subset K^m$ est un sous-espace vectoriel.

AZ: On peut prouver que le choix d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times m}$ comme dans le dernier exemple définit un morphisme de groupes :

$$\varphi_A : (\mathbb{M}_{m\times 1}(K), +) \to (\mathbb{M}_{n\times 1}(K), +)$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

En utilisant ce langage, nous avons que $W_A = \ker(\varphi_A)$.

1.1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.1.9. Soit V un K-espace vectoriel. Une partie $W \subset V$ s'appelle un **sous-espace vectoriel** (ou simplement sous-espace) de V si les restrictions des deux lois $+$ et $\cdot$ à W font de W un K-espace vectoriel.

La proposition suivante nous dit qu'il faut et il suffit de vérifier une seule condition pour assurer que partie non vide de V est un sous-espace.

Proposition 1.1.10. *Soient V un K-espace vectoriel et $\emptyset \neq W \subset V$. Alors W est un sous-espace de V si et seulement si pour tout $\lambda \in K$ et pour tous $u, v \in W$ on a que $\lambda u + v \in W$.*

Démonstration. Tout d'abord, c'est clair que si $\emptyset \neq W \subset V$ est un sous-espace, $\lambda \in K$, et $u, v \in W$, alors $\lambda u + v \in W$.

À l'inverse, comme W est non vide, il existe $w \in W$ et en prenant $\lambda = -1 \in K$ on trouve que $(-1) \cdot w + w = -w + w = 0_V \in W$. Donc, W possède le vecteur nul. Mais alors il contiendra aussi des inverses. Comme $0_V \in W$ en prenant $\lambda = -1 \in K$ encore une fois on déduit que

$$w \in W \Rightarrow -w = (-1) \cdot w + 0_V \in W.$$

Nous pouvons également montrer que W est stable par $+$ et par $\cdot$:

- $u, v \in W \Rightarrow 1 \cdot u + v = u + v \in W$ (prenez $\lambda = 1$)
- $\lambda \in K, u \in W \Rightarrow \lambda \cdot u + 0_V = \lambda \cdot u \in W$ (prenez $v = 0_V$).

Et enfin, les propriétés restantes sont vérifiées car elles étaient déjà dans V. □

Exemple 1.1.11 (Sous-espace engendré)**.** Soit V un K-espace vectoriel et soient $v_1, \dots, v_k \in V$. Posons

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k) := \{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_i \in K \text{ pour tous } 1 \leq i \leq k\}.$$

On peut vérifier que $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est un sous-espace de V, appelé le sous-espace de V engendré par $v_1, \dots, v_k$. Cet espace est le plus petit sous-espace vectoriel de V contenant le sous-ensemble $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Exemple 1.1.12 (Matrices symétriques)**.** Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ est dite symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour chaque i et j. L'ensemble de toutes les matrices symétriques forme un sous-espace de $\mathbb{M}_{n\times n}(K)$.

Exemple 1.1.13. Toute droite du plan passant par l'origine forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. De même, tout plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ et ainsi de suite.

1.1.4 Pour réfléchir chez-vous

Exercice 1.1.14. Soit $\mathcal{P} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1.1.15. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Vous devez justifier vos réponses.

(a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 5z = 0\}$

(b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

(c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$