Algèbre Linéaire Avancée I
Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini

aline.zanardini@epfl.ch

Septembre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

Table des matières

Cours 3 (15 septembre)

1.1 Anneaux

Définition 1.1.1. Un **anneau unitaire** $(A, +, \cdot)$ est un ensemble (non vide) muni de deux lois de composition

$$+ : A \times A \to A \qquad \text{et} \qquad \cdot : A \times A \to A$$
$$(x, y) \mapsto x + y \qquad\qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

satisfaisant les axiomes suivants :

(A1) $(A, +)$ est un groupe abélien,

(A2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ pour tous $a, b, c \in A$ (la loi $\cdot$ est associative)

(A3) il existe $1_A \in A$ tel que $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$ pour chaque $a \in A$ (1_A est élément neutre pour $\cdot$)

(A4) la loi $\cdot$ est distributive à droite et à gauche sur la loi $+$.

AZ: ⚠ Notez que cachée dans la définition ci-dessus se trouve la stabilité de A par rapport aux deux lois.

AZ: ⚠ Pour moi un anneau est toujours unitaire, c'est-à-dire que (A3) est toujours vrai pour les triplets $(A, +, \cdot)$ qui m'intéressent, donc je me permettrai de parler simplement d'anneaux. Par contre, pour moi, il existe des anneaux très intéressants qui ne sont pas commutatifs, c'est-à-dire, dans lesquels $a \cdot b \neq b \cdot a$!

Remarque 1.1.2. Si $(A, +, \cdot)$ est un anneau (unitaire), on écrira souvent ab à la place de $a \cdot b$ et on parlera de la multiplication dans A. Notez que les inverses multiplicatifs n'existent pas nécessairement. En plus, on suppose que $1_A \neq 0$, et donc que $A \neq \{0\}$.

1.1.1 Exemples

Exemple 1.1.3. Les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ munis des opérations usuelles d'addition et de multiplication sont des anneaux commutatifs.

Exemple 1.1.4. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On peut munir l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n d'une deuxième loi de composition. On peut associer à chaque paire $(\overline{a}, \overline{b})$ l'élément $\overline{ab} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Je vous laisse comme exercice de vérifier que les axiomes $(A1), \ldots, (A4)$ dans la Définition 1.1.1 sont valables.

Exemple 1.1.5. Soit I un intervalle ouvert de la droite réelle et soit encore $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Considérez les opérations d'addition et de multiplication de fonctions :

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x).$$

Alors, $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un anneau avec ces lois. En fait, on peut considérer tout ensemble E non vide et tout anneau $(A, +, \cdot)$, et il est toujours vrai que $\mathcal{F}(E, A)$ est un anneau avec l'addition et la multiplication usuelles.

Exemple 1.1.6 (Des matrices revisitées)**.** Si A est un anneau, on peut considérer l'ensemble $\mathbb{M}_{n\times n}(A)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans A. Avec les mêmes définitions de l'addition et de la multiplication que pour les matrices réelles, cet ensemble est un anneau.

1.1.2 Quelques propriétés

Lemme 1.1.7. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau (unitaire). Alors,*

(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ *pour tout* $a \in A$,

(ii) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ *pour tous* $a, b, \in A$, *et*

(iii) $(-a)(-b) = ab$ *pour tous* $a, b \in A$.

Démonstration.

(i) Pour tout $a \in A$ on a

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a \qquad \text{(0 est l'élément neutre pour } +\text{)}$$

$$= 0 \cdot a + 0 \cdot a. \qquad \text{(} \cdot \text{ est distributive à droite sur } +\text{)}$$

Notez maintenant que nous pouvons également écrire $0 \cdot a = 0 \cdot a + 0$. Donc, en utilisant la simplification à gauche (cours 2, Proposition 2.1.4), il s'ensuit que $0 \cdot a = 0$. Pour démontrer que $a \cdot 0 = 0$ nous pouvons utiliser un argument symétrique complètement analogue :

car 0 est l'élément neutre pour +

$$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

(ii) Il suffit d'observer que pour tous $a, b \in A$ nous avons que

$$ab + (-a)b \overset{\cdot \text{ est distributive à droite sur } +}{=} (a + (-a)) \cdot b \overset{\text{définition d'inverse et 0 est l'élément neutre pour } +}{=} 0 \cdot b \overset{\text{Lemma 1.1.7 (i)}}{=} 0$$

et, similairement,

$$ab + a(-b) \overset{\cdot \text{ est distributive à gauche sur } +}{=} a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0.$$

Donc, par l'unicité des inverses additifs (c.-à-d. par rapport à $+$), on a que $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(iii) En utilisant (ii) deux fois et le fait que $-(-a) = a$ (cours 2, Proposition 2.1.4 (ii)), nous obtenons que

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$$

pour tous $a, b \in A$.

□

1.1.3 Morphismes et sous-anneaux

Définition 1.1.8 (Morphisme d'anneaux)**.** Soient $(A, +, \cdot)$ et $(B, \oplus, \times)$ deux anneaux, avec unités (des éléments neutres multiplicatifs) 1_A et 1_B, respectivement. Un **morphisme d'anneaux** est une application $\varphi : A \to B$ telle que pour tous $a, b \in A$ on a

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$,
- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$, et
- $\varphi(1_A) = 1_B$.

En algèbre, il est toujours intéressant de considérer les sous-structures. Par exemple, nous avons vu que de nombreux exemples de groupes proviennent de l'étude des sous-groupes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Pour les anneaux, le concept de sous-anneau est le suivant.

Définition 1.1.9 (Sous-anneau)**.** Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau et $S \subset A$. On dit que $(S, +, \cdot)$ est un **sous-anneau** de A si

(S1) $(S, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ – en particulier, S est non vide ;

(S2) nous avons que $a \cdot b$ appartient à S pour tous $a, b \in S$;

(S3) et l'élément neutre multiplicatif 1_A de A appartient à S.

AZ: Notez que le point (ii) dans la définition ci-dessus nous dit que S est unitaire et que $1_S = 1_A$.

Lemme 1.1.10. *Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau et $S \subset A$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $(S, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(A, +, \cdot)$,

(ii) $1_A \in S$ et pour tous $a, b \in S$, on a $a - b \in S$ et $a \cdot b \in S$.

Démonstration.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Cela découle directement de la définition d'un sous-anneau.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Tout d'abord on note que (S2) et (S3) sont valides d'après (ii). Maintenant, on montre que (S1) est valide. On utilise la Proposition 2.2.2 prouvée dans le cours 2. Comme $1_A \in S$, S est non vide et comme $1_A - 1_A = 0$ on a que $0 \in S$. Donc on a aussi que

- $b \in S \Rightarrow 0 - b = -b \in S$, et, par conséquent, que
- $a, b \in S \Rightarrow a - (-b) = a + b \in S$.

C'est-à-dire que $(S, +)$ est un groupe.

□

1.1.4 Plus d'exemples

Il découle de la définition de sous-anneau que si $(S, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(A, +, \cdot)$, alors S est un anneau. Nous pouvons donc examiner d'autres exemples d'anneaux.

Exemple 1.1.11. Soit $m \geq 2$ un nombre entier naturel qui n'est pas un carré parfait. Considérez l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] := \{a + b \cdot \sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors, $(\mathbb{Z}[\sqrt{m}], +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Exemple 1.1.12. Soit I un intervalle ouvert de la droite réelle et soit encore $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont continues. Alors, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ décrit dans l'Exemple 1.1.5 et, par conséquent, il est lui-même un anneau. De même, les règles de dérivation montrent que l'ensemble de toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui sont dérivables/différentiables sur l'intervalle I est aussi un anneau. Pourquoi ? Après avoir appris ces concepts, essayez de bien comprendre cet exemple.

⚠ Les notions de fonction continue et de fonction dérivable seront étudiées dans le cours d'analyse.

Cours 4 (17 septembre)

2.1 Corps

Un corps est un anneau unitaire commutatif dans lequel tout élément non nul (c.-à-d. $\neq 0$) est inversible par rapport à la multiplication :

Définition 2.1.1. Soit $(K, +, \cdot)$ un anneau unitaire. On dit que K est un **corps** si et seulement si $K \neq \{0\}$, la loi $\cdot$ est commutative, et pour tout $a \in K\backslash\{0\}$, il existe $a^{-1} \in K$ tel que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

On peut prouver qu'un anneau $(K, +, \cdot)$ est un corps si et seulement si $(K, +)$ et $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ sont des groupes abéliens et, en plus, on a que $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ pour tous $a, b, c \in K$. Notez que la commutativité de la loi $\cdot$ implique que la distributivité à gauche est équivalente à la distributivité à droite.

Pourquoi ? Essayez de prouver que cette affirmation est vraie.

Les anneaux $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, où $+$ et $\cdot$ sont les opérations usuelles, sont des corps. Par contre, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ n'est pas un corps. Pourquoi ?

Voir aussi Section 2.1.2 ci-dessous.

2.1.1 Corps finis

Proposition 2.1.2. *Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Alors, tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ différent de $\overline{0}$ est inversible.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{a} \neq \overline{0}$. Comme a n'est pas un multiple de p et p est un nombre premier, on a que $\text{pgcd}(a, p) = 1$. Donc, par l'identité de Bézout, il existe $b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $ab + pc = 1$. Donc $ab - 1 = -pc$ et p divise $ab - 1$. Par conséquent, $\overline{ab} = \overline{1}$ et on déduit que $\overline{a}$ est inversible. □

Corollaire 2.1.3. *Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Alors, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un corps. Souvent, on écrit $\mathbb{F}_p$ pour désigner le corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

2.1.2 Le corps de nombres complexes

Le corps de nombres complexes est l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres qui peuvent être écrits comme $a + b \cdot i$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et i satisfait $i^2 = -1$ (c'est l'une des racines de $p = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$.) ; et qui est équipé des opérations :

$$(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) := (a + c) + (b + d) \cdot i$$

et

$$(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) := (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i.$$

La partie réelle du nombre complexe $z = a + b \cdot i$ est $\Re(z) = a$, et la partie imaginaire est $\Im(z) = b$. En plus, nous définissons le conjugué d'un nombre complexe $z = a + b \cdot i$ comme étant le nombre complexe $\overline{z} := a - b \cdot i$. Finalement, notez qu'on peut construire une bijection $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $a + b \cdot i \mapsto (a, b)$. Le module d'un nombre complexe $z = a + b \cdot i$ est le nombre réel noté $|z|$ défini par $\sqrt{a^2 + b^2}$. Autrement dit, $|z|$ est égal à la distance (euclidienne) entre les points (a, b) et $(0, 0)$.

Plan complexe et forme polaire Par définition, tout nombre complexe correspond uniquement à un vecteur dans le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La somme des nombres complexes correspond à la somme des vecteurs, et la conjugaison correspond à la réflexion par rapport à l'axe réel, c-à.-d. $\mathbb{R} \times \{0\} \simeq \{a + b \cdot i \in \mathbb{C} \mid b = 0\}$. Alors, si $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, en notant $r = |z| > 0$ le module et $\theta = \arctan(b/a) \in (-\pi, \pi]$ l'argument, on peut écrire $a + b \cdot i = r \underset{=a}{\cos \theta} + (r \underset{=b}{\sin \theta}) \cdot i$.

En fait, on considéré θ modulo 2π

Forme matricielle Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les matrices 2×2 à coefficients réels qui ont la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

On peut prouver que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\to \mathcal{C} \\ a + b \cdot i &\mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme (= morphisme bijectif) d'anneaux.

2.2 Anneaux de polynômes

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et considérons $A^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites ordonnées $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ d'éléments de A avec $a_i \neq 0$ pour un nombre fini de i . On peut définir deux lois de composition interne sur $A^{\mathbb{N}}$:

- $(a_0, a_1, \ldots) \oplus (b_0, b_1, \ldots) \coloneqq (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$, et
- $(a_0, a_1, \ldots) \odot (b_0, b_1, \ldots) \coloneqq (c_0, c_1, \ldots)$, où $c_k \coloneqq \sum_{i+j=k} a_i b_j$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Ça veut dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_i = 0$ pour tous $i > n$

On note tout de suite que $(A^{\mathbb{N}}, \oplus)$ est un groupe abélien avec élément neutre $(0, 0, 0, \ldots)$, l'inverse de $(a_0, a_1, \ldots)$ est $(-a_0, -a_1, \ldots)$, et l'associativité et la commutativité de la loi $\oplus$ sont héritées de celles de $+$ (dans A). On note aussi que $\odot$ est également associative et que son élément neutre est la suite $(1_A, 0, 0, \ldots)$.

En ce qui concerne $A^{\mathbb{N}}$, nous adoptons les notations suivantes. On écrit :

(N1) $0 = (0, 0, \ldots)$,

(N2) $x \coloneqq (0, 1_A, 0, 0, \ldots)$,

(N3) $1 = (1_A, 0, 0, \ldots)$, et

(N4) pour $a \in A$, $a = (a, 0, 0, \ldots)$.

En plus, on remplace $\oplus$ par $+$ et $\odot$ par $\cdot$ (ou par la juxtaposition d'éléments), et on désigne $(A^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ par $(A[x], +, \cdot)$. On appelle ce triple **l'anneau des polynômes à coefficients dans A** (voir Proposition 2.2.1 ci-dessous). Les affirmations suivantes sont des conséquences directes de ces nouvelles notations.

- Pour $a \in A$, on a que $a = a \cdot 1$.
- Pour $a \in A$, on a que $(0, a, 0, \ldots) = (a, 0, 0, \ldots) \odot (0, 1_A, 0, \ldots) = a \cdot x$.
- Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on a que $(0, 0, \ldots, 1_A, 0, \ldots) = x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$, où le terme 1_A est à la $(n+1)$-ième place.

- Pour $a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, si $a_k = 0$ pour tout $k > n$, on a que

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n.$$

Proposition 2.2.1. *L'ensemble $A[x]$, avec $+$ et $\cdot$, est un anneau. Si A est commutatif, alors $A[x]$ est commutatif. L'application $\varphi : A \to A[x]$ définie par $\varphi(a) = (a, 0, 0, \ldots)$ est un morphisme d'anneaux qui, par ailleurs, est injectif.*

AZ: Notez qu'étant donné le morphisme φ de la Proposition 2.2.1, on identifie A avec $\varphi(A)$, et A devient un sous-anneau de l'anneau de polynômes $A[x]$.

Définition 2.2.2. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

(i) Soit $p = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n \in A[x]$, avec $a_n \neq 0$. On dit que p est de degré n, et on écrit $\deg(p) = n$. On pose $\deg(0) = -\infty$.

(ii) Pour $p \in A[x]$, si $\deg(p) = n$ et $a_n = 1_A$ (le coefficient du terme de plus haut degré), on dit que p est unitaire.

(iii) Si $\deg(p) = 0$, ou si $p = 0$, on dit que p est un polynôme constant.

2.2.1 Polynômes à coefficients dans un corps

Si K est un corps, nous savons d'après la Proposition 2.2.1 que l'ensemble des polynômes à coefficients dans K, muni de l'addition et de la multiplication des polynômes, est un anneau commutatif. En plus, dans le cas où K est un sous-anneau d'un anneau A, il est utile de considérer les morphismes d'évaluation en un élément $a \in A$.

Définition 2.2.3. Soit K un corps qui est sous-anneau d'un anneau A. Soit encore $p \in K[x] \subset A[x]$ avec $p = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

(i) L'évaluation de p en $\alpha \in A$, notée $p(\alpha)$, est l'élément de A suivant :

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n.$$

- Pour chaque $\alpha \in A$ fixé, on peut donc considérer le morphisme d'anneaux $ev_\alpha : K[x] \to A$ défini par $p \mapsto p(\alpha)$.
- On peut également considérer le morphisme d'anneaux $\varepsilon : K[x] \to \mathcal{F}(A, A)$ défini par

$$p \mapsto (\alpha \mapsto ev_\alpha(p) = p(\alpha)).$$

(ii) Un élément $\alpha \in A$ s'appelle une **racine** de $p \in K[x]$ si $p(\alpha) = 0_A$.

Théorème 2.2.4 (division euclidienne des polynômes). *Soient $p, q \in K[x]$ avec $q \neq 0$. Alors, il existe un unique couple de polynômes $g, r \in K[x]$ avec $\deg(r) < \deg(q)$ et tels que $p = g \cdot q + r$*

Démonstration. Admis sans preuve. □

Corollaire 2.2.5. *Soit K un corps et soient encore $p \in K[x]$ et $\alpha \in K$. Alors, α est une racine de p si et seulement si $x - \alpha$ divise p, c-à.-d. $p = g(x - \alpha)$ pour un certain $g \in K[x]$.*

Démonstration. L'assertion découle du théorème précédent en posant $q = x - \alpha$ et en utilisant le fait que $ev_\alpha : K[x] \to K$ est un morphisme d'anneaux. □

2.2.2 Théorème fondamental de l'algèbre

Définition 2.2.6. Soit K un corps. On dit qu'un polynôme $p \in K[x]$ est scindé s'il existe $\beta, b_1, \ldots, b_n \in K$ tels que

$$p = \beta(x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdot \ldots \cdot (x - b_n)$$

Théorème 2.2.7 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé.*

Démonstration. Admis sans preuve. □

2.3 Pour réfléchir chez-vous

Exercice 2.3.1. Comprenez bien l'exemple suivant. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme du second degré avec des coefficients réels. Par exemple, on peut considérer $\alpha = \sqrt{2}$ et le polynôme $p(x) = x^2 - 2$. Alors, l'ensemble

$$\mathbb{R}[\alpha] := \{a + b \cdot \alpha \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Exercice 2.3.2. Soit $m \geq 2$ un nombre entier naturel qui n'est pas un carré, par exemple, on peut considérer $m = 2$. Considérez l'ensemble

$$\mathbb{Q}[\sqrt{m}] := \{a + b \cdot \sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Prouvez que les affirmations suivantes sont vraies.

(i) L'application $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ définie par $a \mapsto a$ (l'inclusion) est un morphisme d'anneaux injectif.

(ii) $(\mathbb{Q}[\sqrt{m}], +, \cdot)$ est un corps.

Exercice 2.3.3. Considérez l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (comme dans l'Exercice 2.3.2) et le sous-anneau $(A, +, \cdot)$ de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ de toutes les matrices qui ont la forme

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Prouvez que l'application $\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \mapsto A$ définie par $a + b \cdot \sqrt{2} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'anneaux, c.-à-d. un morphisme qui est bijectif.

Exercice 2.3.4. Trouvez un morphisme d'anneaux $\varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Existent-ils ? Si oui, combien ? Et si plutôt nous considérons des morphismes $\varphi : (\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot) \to (\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$? Je prétends que dans ce dernier cas, il n'y en a que deux, et que tous deux sont des isomorphismes. Pourquoi ? Pouvez-vous les décrire ?

En conclusion

Structure	Définition
Groupe	Ensemble muni d'une loi de composition interne, associative, admettant un élément neutre et des inverses pour chaque élément.
Anneau	Ensemble avec deux opérations (addition et multiplication), l'addition formant un groupe abélien, et la multiplication admettant un élément neutre, étant associative et distributive par rapport à l'addition.
Corps	Anneau commutatif où chaque élément non nul possède un inverse multiplicatif.
Morphisme des groupes	Une application entre deux groupes qui respecte la structure de groupe.
Morphisme d'anneaux	Une application entre deux anneaux qui respecte la structure d'anneau.

TABLE 1 – Résumé