Algèbre Linéaire Avancée I
Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini
aline.zanardini@epfl.ch

Décembre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

Table des matières

Cours 24 (15 décembre)

1.1 Matrices diagonales et endomorphismes diagonalisables

On fixe un corps K, un K-espace vectoriel V de dimension finie n et un endomorphisme linéaire $\varphi : V \to V$.

Définition 1.1.1. L'application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ est dite **diagonalisable** (sur K) si elle possède une matrice diagonale par rapport à une certaine base de V. Autrement dit, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ soit diagonale.

AZ: Notez que si φ est diagonalisable, alors φ est trigonalisable.

Proposition 1.1.2. *Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ soient des valeurs propres distinctes de φ. Alors la somme $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_m}$ est une somme directe. En particulier,*

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_m}) = \mu_g(\lambda_1) + \ldots + \mu_g(\lambda_m) \leq \dim(V) = n.$$

Démonstration. Pour montrer que la somme est une somme directe, supposons que $v_1 + \ldots + v_m = 0_V$, où chaque v_i appartient à E_{λ_i}. Puisque les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (d'après Proposition 1.1.10, cours 21), cela implique que chaque v_i est égal à 0_V. Ainsi, $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_m}$ est une somme directe, comme souhaité. □

AZ: Rappelez-vous que si $V_1, \ldots, V_m$ sont des sous-espaces de V. Alors $V_1 + \ldots + V_m$ est une somme directe si et seulement si la seule façon d'écrire 0_V comme une somme $v_1 + \ldots + v_m$, où chaque $v_i \in V_i$, est de prendre chaque v_i égal à 0_V.

1.1.1 Conditions de diagonalisation

Théorème 1.1.3. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de φ. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est diagonalisable.*

(ii) *V possède une base constituée des vecteurs propres de φ.*

(iii) $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}$

(iv) $\dim(V) = \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_m}) = \mu_g(\lambda_1) + \ldots + \mu_g(\lambda_m)$.

(v) *$c_\varphi(x)$ est scindé dans $K[x]$ et pour chaque $i = 1, \ldots, m$ on a que $\mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)$.*

AZ: ⚠ Notez que je ne suppose pas que $m = n$!

Démonstration.

- $(i) \iff (ii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iv)$

  φ possède une matrice diagonale

  $$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

  par rapport à une base ordonnée $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de V si et seulement si $\varphi(v_j) = \alpha_j \cdot v_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Cela montre que (i) et (ii) sont équivalentes.

  En plus, notez qu'en particulier les α_js doivent appartenir à la liste des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Donc, si φ est diagonalisable, alors

  $$c_\varphi(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_m)^{d_m}.$$

  avec $d_i = \mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i)$, car $\mu_g(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i}) \geq \#\{v_j \in \mathcal{B}\,;\, v_j \in E_{\lambda_i}\} = n_i = \mu_a(\lambda_i) \geq \mu_g(\lambda_i)$.

  En fin, l'implication $(v) \Rightarrow (iv)$ est claire.

- $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii)$

  Si (ii) est vrai, alors tout vecteur de V est une combinaison linéaire des vecteurs propres de φ et donc $V = E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_m}$. Or, d'après la Proposition 1.1.2, la somme est toujours directe. Par conséquent, (iii) est vérifiée.

  Maintenant, si (iii) est vraie, c'est immédiat que (iv) est vraie aussi. Supposons donc que (iv) soit vrai. Choisissez une base de chaque espace propre E_{λ_i} ; rassemblez toutes ces bases pour former une liste $v_1, \ldots, v_n$ de vecteurs propres de V. Pour montrer que cette liste est libre, supposons

  $$a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n = 0$$

  où $a_1, \ldots, a_n \in K$. Pour chaque $i = 1, \ldots, m$, soit u_i la somme de tous les termes $a_j \cdot v_j$ tels que $v_j \in E_{\lambda_i}$. Ainsi, chaque u_i appartient à E_{λ_i}, et en plus

  $$u_1 + \ldots + u_m = 0.$$

  Mais alors, puisque les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (voir Proposition 1.1.10, cours 21), cela implique que chaque u_i est égal à 0_V. ET puisque chaque u_i est une somme de termes $a_j \cdot v_j$, où les v_j ont été choisis pour former une base de E_{λ_i}, cela implique que tous les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ sont égaux à 0_K. Par conséquent, $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de V et donc (iv) implique (ii).

  □

Notez que le Théorème 1.1.3 nous dit qu'en choisissant un ordre des valeurs propres distinctes, disons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, et en posant $g_i = \mu_g(\lambda_i)$, alors ϕ est diagonalisable si et seulement si il existe une base ordonnée $\mathcal{B} = \underbrace{(v_{1_1}, \ldots, v_{1_{g_1}}, v_{2_1}, \ldots, v_{2_{g_2}}, \ldots, v_{m_1}, \ldots, v_{m_{g_m}})}_{n=g_1+\ldots+g_m}$ de V avec $\varphi(v_{i_{j(i)}}) = \lambda_i \cdot v_{i_{j(i)}}$, pour tous $i = 1, \ldots, m$ et pour tous $j(i) = 1, \ldots, g_i$. En plus, si tel est le cas, alors

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D_{\lambda_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & D_{\lambda_{m-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & D_{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

où chaque bloc D_{λ_i} est de taille $g_i = \mu_g(\lambda_i)$ et a la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Corollaire 1.1.4. *Si le polynôme caractéristique $c_\varphi(x)$ possède n racines distinctes (dans K), alors φ est diagonalisable (sur K).*

Nous avons également le critère suivant :

Proposition 1.1.5. *φ est diagonalisable (sur K) si et seulement si $m_\varphi(x)$, le polynôme minimal de φ, est égal à*

$$(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_m)$$

pour une certaine liste de scalaires distincts $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in K$.

Démonstration. Ce résultat est facultatif et nous ne donnons ici que l'idée de la démonstration.

Supposons d'abord que φ soit diagonalisable. Il existe donc une base $(v_1,\ldots,v_n)$ de V constituée des vecteurs propres de φ. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ les valeurs propres distinctes de φ. .Alors, pour chaque v_j, il existe une seule valeur propre λ_i telle que $(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})(v_j)=0_V$. Ainsi,

$$(\varphi-\lambda_1\cdot\mathrm{id})\cdot\ldots\cdot(\varphi-\lambda_m\cdot\mathrm{id})(v_j)=0$$

pour chaque v_j. De plus, soit $m=1$, soit si nous omettons l'un des opérateurs $\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id}$ dans l'expression ci-dessus, alors nous pouvons trouver au moins un vecteur vj qui ne sera pas annihilé par les autres. Cela implique que le polynôme minimal de φ est égal à

$$(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_m).$$

Pour démontrer l'implication dans l'autre sens, on argumente par récurrence sur m en utilisant le fait que

$$(\varphi-\lambda_1\cdot\mathrm{id})\cdot\ldots\cdot(\varphi-\lambda_m\cdot\mathrm{id})=0$$

et que $V=\mathrm{im}(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})\oplus\ker(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})$. □

Cours 25 (16 décembre)

On fixe un corps K, un K-espace vectoriel V de dimension finie n.

2.1 Opérateurs commutatifs

Définition 2.1.1.

(i) Deux opérateurs linéaires φ et ψ définis sur un même espace vectoriel V commutent si $\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi$.

(ii) Deux matrices carrées A et B de même taille (et à coefficients dans le même corps) commutent si $AB=BA$.

Théorème 2.1.2. *Supposons que $\varphi,\psi\in\mathcal{L}(V,V)$ et que $\mathcal{B}=(v_1,\ldots,v_n)$ soit une base ordonnée de V. Alors,*

(i) φ et ψ commutent si et seulement si les matrices $[\varphi]_\mathcal{B}$ et $[\psi]_\mathcal{B}$ commutent.

(ii) Supposons que φ et ψ commutent et que $\lambda\in K$ soit une valeur propre de φ. Alors E_λ est invariant sous ψ.

(iii) Supposons que φ et ψ soient diagonalisables. Alors, φ et ψ peuvent être représentées par des matrices diagonales par rapport à la même base si et seulement si φ et ψ commutent.

(iv) Si $K=\mathbb{C}$ et φ et ψ commutent, alors φ et ψ ont un vecteur propre commun et il existe une base de V par rapport à laquelle φ et ψ sont représentées par des matrices triangulaires supérieures.

Démonstration.

(i) On a que

$$\begin{aligned}\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi &\iff [\varphi\circ\psi]_{\mathcal{B}}=[\psi\circ\varphi]_{\mathcal{B}}\\ &\iff [\varphi]_{\mathcal{B}}\cdot[\psi]_{\mathcal{B}}=[\psi]_{\mathcal{B}}\cdot[\varphi]_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

(ii) Si $v\in E_\lambda$, alors $\varphi(\psi(v))=\psi(\varphi(v))=\psi(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot\psi(v)$, ce qui nous dit que $\psi(v)\in E_\lambda$.

(iii) Les matrices diagonales de même taille commutent toujours, donc en utilisant (i), l'implication $\Rightarrow$ est claire.

Pour démontrer l'implication dans l'autre sens, supposons maintenant que φ et ψ sont des opérateurs diagonalisables et commutatifs. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$les valeurs propres distinctes de φ. Puisque φ est diagonalisable, on sait d'après le Théorème 1.1.3 que

$$V=E_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus E_{\lambda_m}$$

Or, pour chaque $i=1,\ldots,m$, le sous-espace E_{λ_i} est invariant par ψ par (ii). Puisque φ est diagonalisable, cela implique que la restriction de ψ à chacun de ces espaces propres de φ est diagonalisable aussi. Par conséquent, pour chaque $i=1,\ldots,m$, il existe une base de E_{λ_i} constituée des vecteurs propres de ψ. La combinaison de ces bases donne une base $\mathcal{C}$ de V, chaque vecteur de cette base étant un vecteur propre à la fois de φ et de ψ. Ainsi, $[\varphi]_{\mathcal{C}}$ et $[\psi]_{\mathcal{C}}$ sont des matrices diagonales, comme souhaité.

(iv) Comme $K=\mathbb{C}$, φ possède au moins un vecteur propre associé à une certaine valeur propre λ. Or, comme E_λ est invariant par ψ lorsque φ et ψ commutent, la restriction de ψ à cet espace E_λ possède également au moins un vecteur propre, à la fois pour φ et pour ψ.

Maintenant, pour prouver la dernière partie de l'énoncé, nous pouvons procéder par récurrence sur $n=\dim(V)$. Le résultat souhaité est vérifié si $n=1$ car toutes les matrices 1×1 sont déjà triangulaires supérieures. Puis, si $n>1$ et on suppose que le résultat souhaité est vérifié pour tous les espaces vectoriels complexes de dimension $n-1$, il suffit d'observer que φ et ψ ont un vecteur propre commun, disons v_1, de considérer une somme directe $V=\mathrm{Vect}(v_1)\oplus W$ et les opérateurs $\tilde{\varphi}=\pi_W\circ\varphi$ et $\tilde{\psi}=\pi_W\circ\psi$, où $\pi_W:V\to W$ est la projection sur W, c'est-à-dire l'application linéaire

$$\pi_W(\underbrace{\alpha\cdot v_1+w}_{\in\mathrm{Vect}(v_1)\oplus W})=w.$$

L'hypothèse d'induction peut leur être appliquée. Il existe une base $v_2,\ldots,v_n$ de W par rapport à laquelle $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ ont toutes deux des matrices triangulaires supérieures. En plus, $(v_1,\ldots,v_n)$ constitue une base ordonnée de V, et, par construction, les matrices de φ et ψ sont triangulaires supérieures dans cette base.

□

Corollaire 2.1.3. *Si $K=\mathbb{C}$ et φ et ψ commutent, alors :*

(i) toute valeur propre de $\varphi+\psi$ est une valeur propre de φ plus une valeur propre de ψ, et

(ii) toute valeur propre de $\varphi\circ\psi(=\psi\circ\varphi)$ est une valeur propre de φ multipliée par une valeur propre de ψ.

Cours 26 & 27 (16 & 17 décembre)

3.1 Espaces munis d'un produit scalaire (non examinable)

AZ: Je fournirai des notes manuscrites pour cette partie après le cours.

AZ: J'avance un peu plus lentement que prévu ; il est donc possible que je ne donne qu'un seul cours sur ce sujet.

AZ: L'objectif principal est de donner un aperçu du lien entre le contenu du second semestre et ce que nous avons vu jusqu'ici.