

Algèbre Linéaire Avancée I

Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini
aline.zanardini@epfl.ch

Décembre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

Voici les sujets qui seront abordés ensuite

1 Cours 22 (8 décembre)	2
1.1 Multiplicité géométrique et multiplicité algébrique	2
1.2 Polynôme minimal d'un endomorphisme	3
2 Cours 23 (10 décembre)	6
2.1 Matrices triangulaires et endomorphismes trigonalisables	6
3 Cours 24 (17 décembre)	9
3.1 Matrices diagonales et endomorphismes diagonalisables	9
4 Cours 25 (18 décembre)	9
4.1 Opérateurs commutatifs	9
5 Cours 26 & 27 (18 & 19 décembre)	9
5.1 Espaces munis d'un produit scalaire	9

1.1 Multiplicité géométrique et multiplicité algébrique

Définition 1.1.1. Soient K un corps, V un K -espace vectoriel de dimension finie et soit encore $\lambda \in K$ une valeur propre d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$.

- (i) La multiplicité algébrique de λ , notée $\mu_a(\lambda)$, est la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.
- (ii) La multiplicité géométrique de λ , notée $\mu_g(\lambda)$, est la dimension de l'espace propre E_λ . Autrement dit, c'est la dimension du noyau de l'application $\varphi - \lambda \cdot \text{id}$.

Exemple 1.1.2. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Alors, on a que $c_A(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$ et donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 5$. Dans ce cas, les deux valeurs propres ont la même multiplicité algébrique, égale à 1.

Exemple 1.1.3. Considérons maintenant, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors,

$$B - x \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 0 \\ 1 & 0 & 3-x \end{pmatrix}$$

et on a que $c_B(x) = \det(B - x \cdot I_3) = (3-x)^3$ et donc que $\lambda = 3$ est la seule valeur propre de la matrice B , avec multiplicité algébrique égale à 3.

Calculons maintenant la multiplicité géométrique $\mu_g(3)$. Par définition, $\mu_g(3) = \dim(\ker(\varphi_B - 3 \cdot \text{id}))$, où $\varphi_B : \mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire donnée par la multiplication (à gauche) par B . Comme la matrice de $\varphi_B - 3 \cdot \text{id}$ par rapport à la base canonique est donnée par

$$B - 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nous en déduisons que $\mu_g(3) = 2$.

En fait, dans cet exemple, l'espace propre E_3 est engendré par des vecteurs propres $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifiez-le !

AZ: Cet exemple montre notamment que, de manière générale, les deux notions de multiplicité (algébrique et géométrique) sont différentes. On peut en tout cas démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.1.4. Soient K un corps, V un K -espace vectoriel de dimension finie et soit encore $\lambda \in K$ une valeur propre d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors, $\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$.

Démonstration. Posons $m = \mu_g(\lambda)$. Considérons donc une base ordonnée $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ de l'espace propre E_λ . Si $m = \dim(V) = \deg(c_\varphi(x))$, il n'y a rien à prouver, car $c_\varphi(x) = c_A(x) = (\lambda - x)^m$. Sinon, nous pouvons compléter \mathcal{B} en une base ordonnée de V , disons $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$. Alors, la matrice $A = [\varphi]_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}$ a la forme

$$\begin{pmatrix} D & M \\ 0_{n-m} & N \end{pmatrix}$$

où la matrice $D = \left[\varphi|_{E_\lambda} \right]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \lambda \cdot I_m$ est diagonale, et on a $M \in \mathbb{M}_{m \times (n-m)}(K)$ et $N \in M_{(n-m) \times (n-m)}(K)$.

Donc,

$$c_\varphi(x) = c_A(x) = \det(A - x \cdot I_n) = \det(D - x \cdot I_m) \cdot \det(N - x \cdot I_{n-m}) = (\lambda - x)^m \cdot c_N(x)$$

ce qui montre que la multiplicité algébrique $\mu_a(\lambda)$ est supérieure ou égale à $m = \mu_g(\lambda)$. \square

1.2 Polynôme minimal d'un endomorphisme

Rappelons que, par définition, les valeurs propres des opérateurs sur un K -espace vectoriel V et les zéros des polynômes de $K[x]$ doivent appartenir à K . Une question importante se pose donc : quand les valeurs propres existent-elles ?

Théorème 1.2.1 (existence de valeurs propres). *Tout opérateur sur un \mathbb{C} -espace vectoriel non trivial de dimension finie possède une valeur propre.*

AZ: Ce théorème est valable de manière plus générale sur un corps algébriquement clos.

Première preuve. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors, $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de φ si et seulement si $p_\varphi(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de φ). Comme $p_\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$, on sait, par le théorème fondamental de l'algèbre (cours 4), que $p_\varphi(x)$ admet toujours une racine dans \mathbb{C} , il s'ensuit que φ possède une valeur propre. \square

AZ: Notez que ce premier argument fonctionne même si $V = \{0\}$. Mais ce cas est trivial.

Deuxième preuve. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n et soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Supposons $V \neq \{0\}$ et prenons $0 \neq v \in V$. Alors, les vecteurs

$$v, \varphi(v), \dots, \varphi^n(v)$$

ne sont pas libres. Par conséquent, une combinaison linéaire des vecteurs ci-dessus (dont tous les coefficients ne sont pas nuls) est égale au vecteur nul 0_V . Il existe donc un polynôme non constant $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ de plus petit degré tel que

$$f(\varphi)(v) = 0_V.$$

Or, par le théorème fondamental de l'algèbre, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(\lambda) = 0$ et donc il existe $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que

$$f(x) = (x - \lambda) \cdot g(x).$$

Mais cela implique alors que

$$0_V = f(\varphi)(v) = (\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \cdot (g(\varphi)(v)),$$

et par la minimalité du degré de f , on déduit que $g(\varphi)(v) \neq 0_V$ et donc que λ est une valeur propre de φ avec vecteur propre $g(\varphi)(v)$. \square

AZ: La dernière démonstration est plus compliquée, mais elle contient de nombreuses idées intéressantes et importantes qui peuvent être utilisées pour prouver le résultat suivant.

Théorème 1.2.2. Soit K un corps et supposons que V soit un K -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors il existe un unique polynôme unitaire $m_\varphi(x) \in K[x]$ de degré minimal tel que $m_\varphi(\varphi) = 0$. De plus, $\deg(m_\varphi) \leq \dim(V)$.

Démonstration. Admis sans preuve dans ce cours. \square

AZ: Ce dernier résultat implique qu'un polynôme $p(x) \in K[x]$ est tel que $p(\varphi) = 0$ si et seulement si $p(x)$ est un multiple de $m_\varphi(x)$. Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que le polynôme caractéristique $c_\varphi(x)$ a cette propriété, c.-à-d. $c_\varphi(\varphi) = 0$. C'est un théorème que vous verrez le semestre prochain.

Définition 1.2.3. Soient K un corps et V un K -espace vectoriel de dimension finie. Soit encore $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors le **polynôme minimal** de φ est l'unique polynôme unitaire $m_\varphi(x) \in K[x]$ de degré minimal tel que $m_\varphi(\varphi) = 0$.

Pour calculer le polynôme minimal d'un opérateur $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$, nous devons trouver le plus petit entier positif r tel que l'équation

$$a_0 \text{id}_V + a_1 \cdot \varphi + \dots + a_{r-1} \cdot \varphi^{r-1} = -\varphi^r$$

admet une solution $a_0, \dots, a_{r-1} \in K$. Si l'on choisit une base de V et remplace φ dans l'équation ci-dessus par la matrice correspondante à cette base, on peut alors considérer cette équation comme un système de $(\dim(V))^2$ équations linéaires à r inconnues $a_0, \dots, a_{r-1} \in K$. L'élimination de Gauss permet de déterminer l'existence d'une solution en testant successivement les valeurs de r jusqu'à en trouver une. D'après le théorème ci-dessus, une telle solution existe pour un plus petit entier positif $d \leq \dim(V)$. Le polynôme minimal de φ est alors le polynôme

$$a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + x^d \in K[x].$$

Exemple 1.2.4. Supposons $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^5$ et $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ tel que la matrice de φ par rapport à la base canonique est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= e_2 \\ \varphi^2(e_1) &= \varphi(\varphi(e_1)) = \varphi(e_2) = e_3 \\ \varphi^3(e_1) &= \varphi(\varphi^2(e_1)) = \varphi(e_3) = e_4 \\ \varphi^4(e_1) &= \varphi(\varphi^3(e_1)) = \varphi(e_4) = e_5 \\ \varphi^5(e_1) &= \varphi(\varphi^4(e_1)) = \varphi(e_5) = 4e_1 - 7e_2\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{e_1, \varphi(e_1), \varphi^2(e_1), \varphi^3(e_1), \varphi^4(e_1)\}$$

et, par conséquent, que $m_\varphi(x) = -4 + 7x + x^5$.

Proposition 1.2.5. Soient K un corps, V un K -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$.

(i) Les racines du polynôme minimal de φ sont des valeurs propres de φ .

(ii) Si $K = \mathbb{C}$, alors

$$m_\varphi(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_d),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ est une liste de toutes les valeurs propres de φ , éventuellement avec répétition.

AZ: Notez que (i) dit que le polynôme minimal $m_\varphi(x)$ et le polynôme caractéristique $c_\varphi(x)$ ont les mêmes racines.

Démonstration.

(i) Ce que nous voulons prouver, c'est qu'étant donné $\lambda \in K$, alors $c_\varphi(\lambda) = 0 \iff m_\varphi(\lambda) = 0$. Si, $m_\varphi(\lambda) = 0$, alors il existe $q(x) \in K[x]$ tel que

$$m_\varphi(x) = (x - \lambda)q(x)$$

et donc

$$0_V = m_\varphi(\varphi)(v) = (\varphi - \lambda \cdot \text{id})(q(\varphi)(v))$$

pour chaque $v \in V$. Or, comme $\deg(q(x)) < \deg(m_\varphi)$, il découle de la définition du polynôme minimal que $q(\varphi) \neq 0$ et donc il existe au moins un vecteur $v \in V$ tel que $q(\varphi)(v) \neq 0$. Mais alors l'équation ci-dessus dit que λ est une valeur propre de φ associée au vecteur propre $q(\varphi)(v)$.

Inversement, si $m_\varphi(\lambda) \neq 0$, alors il existe (algorithme de division) $q(x) \in K[x]$ et $\alpha \in K^\times$ tels que

$$m_\varphi(x) = (x - \lambda)q(x) + \alpha.$$

Mais alors, comme $\alpha = m_\varphi(\lambda) \neq 0$ on a que

$$\begin{aligned}0 &= m_\varphi(\varphi) = (\varphi - \lambda \cdot \text{id})q(\varphi) + \alpha \cdot \text{id} \\ &\Rightarrow -\alpha^{-1}(\varphi - \lambda \cdot \text{id})q(\varphi) = \text{id} \\ &\Rightarrow \varphi - \lambda \cdot \text{id} \text{ est inversible} \\ &\Rightarrow \lambda \text{ n'est pas une valeur propre de } \varphi \\ &\Rightarrow c_\varphi(\lambda) \neq 0.\end{aligned}$$

(ii) Cela découle du théorème fondamental de l'algèbre (cours 4).

□

Cours 23 (10 décembre)

On fixe un corps K et un K -espace vectoriel. De plus, étant donné une matrice carrée $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$, on note φ_A l'unique application linéaire $\varphi_A : \mathbb{M}_{n \times 1}(K) \simeq K^n \rightarrow \mathbb{M}_{n \times 1}(K) \simeq K^n$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est égale à A . Autrement dit, φ_A est définie tout simplement par multiplication (à gauche) par A .

2.1 Matrices triangulaires et endomorphismes trigonalisables

Définition 2.1.1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Un sous-espace $U \leq V$ est dit **invariant** sous φ si $\varphi(U) \subset U$, c.-à-d. $u \in U \Rightarrow \varphi(u) \in U$.

AZ: Notez que les espaces propres fournissent des exemples de sous-espaces invariants.

▲ À partir de maintenant, nous supposons implicitement que V est de dimension finie n .

Proposition 2.1.2. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base ordonnée de V . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) La matrice $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure.

(ii) Pour chaque $k = 1, \dots, n$, le sous-espace $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) \leq V$ est invariant sous φ .

(iii) Pour chaque $k = 1, \dots, n$ on a que $\varphi(v_k) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.

De plus, chacune de ces affirmations implique l'affirmation suivante :

(iv) Il existe de sous-espaces φ -invariants W_0, \dots, W_n de V avec

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{n-1} \subset W_n = V$$

et $\dim(W_i) = i$ pour chaque $i = 0, \dots, n$.

Inversement, s'il existe des sous-espaces φ -invariants W_0, \dots, W_n comme dans (iv) ci-dessus, en considérant une base ordonnée $\tilde{\mathcal{B}} = (u_1, \dots, u_n)$ de V , avec (u_1, \dots, u_k) base de W_k pour tout $1 \leq k \leq n$, la matrice $[\varphi]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ sera triangulaire supérieure.

Démonstration. Nous prouverons $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. On observe que l'implication $(ii) \Rightarrow (iv)$ est claire, car nous pouvons tout simplement considérer $W_0 = \{0\}$ et $W_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ pour chaque $k = 1, \dots, n$. La dernière affirmation est également claire.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Choisissez $k \in \{1, \dots, n\}$. Comme $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure, on a que $\varphi(v_j) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_j)$ pour tout $1 \leq j \leq k$. Mais alors comme $\text{Vect}(v_1, \dots, v_j) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, nous concluons que $\varphi(v_j) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ pour chaque $1 \leq j \leq k$, ce qui nous dit que le sous-espace $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) \leq V$ est invariant sous φ .

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Cela découle immédiatement de la définition de sous-espace invariant, puisque, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $v_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Si (iii) est vérifié, alors en écrivant chaque vecteur $\varphi(v_k)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base \mathcal{B} , on n'utilise que les vecteurs v_1, \dots, v_k . Par conséquent, tous les coefficients sous la diagonale de la matrice $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ sont nuls. Ainsi, cette matrice est triangulaire supérieure. □

Définition 2.1.3.

- (i) Un endomorphisme linéaire φ de V est dit **trigonalisable** s'il vérifie la condition (iv) de la Proposition 2.1.2 ci-dessus.
- (ii) De même, une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ est dite trigonalisable si l'application linéaire φ_A est trigonalisable, ce qui est équivalent à dire qu'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}(n, K)$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

Le résultat suivant nous indique que si $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ est trigonalisable, alors φ satisfait une équation simple en fonction de ses valeurs propres.

Proposition 2.1.4. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ et supposons qu'il existe une base ordonnée \mathcal{B} de V telle que la matrice $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure avec les coefficients dans la diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, c.-à-d.

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors,

- (i) $(\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \cdot \dots \cdot (\varphi - \lambda_n \cdot \text{id}) = 0$, et
- (ii) les valeurs propres de φ sont précisément les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Démonstration.

- (i) Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base ordonnée de V telle que la matrice $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure comme dans l'énoncé. Il suffit alors d'observer que $\psi := (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \cdot \dots \cdot (\varphi - \lambda_n \cdot \text{id})$ est nul sur chaque vecteur v_k de la base \mathcal{B} . Cela s'explique par le fait que les opérateurs $\varphi - \lambda_i \cdot \text{id}$ et $\varphi - \lambda_j \cdot \text{id}$ commutent et, de plus, que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $(\varphi - \lambda_k \cdot \text{id})(v_k) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$. En effet, il suffit de constater que

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 &\iff (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id})(v_1) = 0 \\ &\implies (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \cdot \dots \cdot (\varphi - \lambda_k \cdot \text{id})(v_1) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \\ &\implies \psi(v_1) = 0 \end{aligned}$$

et il en découlera par récurrence que pour chaque $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda_k \cdot \text{id})(v_k) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1}) &\implies (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \cdot \dots \cdot (\varphi - \lambda_k \cdot \text{id})(v_k) = 0 \\ &\implies (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \cdot \dots \cdot (\varphi - \lambda_j \cdot \text{id})(v_k) = 0 \quad \forall j = k, \dots, n \\ &\implies \psi(v_k) = 0. \end{aligned}$$

- (ii) Puisque $\varphi(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$, on a que λ_1 est une valeur propre de φ . Choisissons $k \in \{2, \dots, n\}$ et, pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, posons $W_j := \text{Vect}(v_1, \dots, v_j)$. Comme pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $(\varphi - \lambda_j \cdot \text{id})(v_j) \in W_{j-1}$ et, si $j \leq k$, on a aussi que $W_{j-1} \subset W_{k-1}$, nous concluons que $\varphi - \lambda_k \cdot \text{id}$ envoie W_k dans W_{k-1} . Mais $\dim(W_k) = k$ et $\dim(W_{k-1}) = k - 1$, donc l'application $\varphi - \lambda_k \cdot \text{id}$ n'est pas injective et il existe alors un vecteur non nul $v \in \ker(\varphi - \lambda_k \cdot \text{id})$. C'est-à-dire que λ_k est une valeur propre de φ . Ainsi, chaque élément de la diagonale de $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ est une valeur

propre de φ . Pour démontrer que φ n'a pas d'autres valeurs propres, on considère le polynôme $p(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n) \in K[x]$. Comme $p(\varphi) = 0$, ce polynôme doit être un multiple du polynôme minimal $m_\varphi(x)$ (voir page 4). Mais alors, chaque racine de $m_\varphi(x)$ est une racine de $p(x)$. Donc, toutes les valeurs propres de φ sont contenues dans la liste $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. □

AZ: Notez que ce dernier résultat nous dit que si φ est trigonalisable, alors le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de φ sont scindés.

Une question naturelle se pose alors : quand un opérateur linéaire est-il trigonalisable ? Pour répondre à cette question, nous concluons notre discussion par le résultat suivant.

Théorème 2.1.5. Soit V un K -espace vectoriel de dimension finie n et soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors φ est trigonalisable si et seulement si $c_\varphi(x)$ est scindé dans l'anneau $K[x]$.

Démonstration. On a déjà montré que si φ est trigonalisable, alors $c_\varphi(x)$ est scindé. Nous ne discuterons donc de l'idée principale concernant l'autre implication.

Comme $c_\varphi(x)$ est scindé, φ possède au moins une valeur propre λ_1 . Soit v_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 . Complétons $\{v_1\}$ en une base ordonnée $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de V et posons $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$. Alors,

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

où \tilde{A} est une matrice carrée à coefficients dans K de taille $n-1$. Or, comme $c_\varphi(x) = c_A(x) = (\lambda_1 - x)c_{\tilde{A}}(x)$, on peut donc considérer un autre opérateur linéaire $\tilde{\varphi}$, cette fois dans l'espace $\text{Vect}(v_2, \dots, v_n)$ de dimension $n-1$, dont le polynôme caractéristique est également scindé, à savoir l'opérateur représenté par \tilde{A} par rapport à la base ordonnée (v_2, \dots, v_n) . Cela montre que pour prouver le théorème, nous pouvons simplement raisonner par récurrence sur la dimension de V . Autrement dit, nous pouvons répéter la première étape avec la paire $(\text{Vect}(v_2, \dots, v_n), \tilde{\varphi})$, remplacer les vecteurs v_2, \dots, v_n par une nouvelle base ordonnée de cet espace, où le premier sera un vecteur propre de $\tilde{\varphi}$, puis continuer ainsi jusqu'à obtenir une bonne base \mathcal{C} de V qui exposera φ comme trigonalisable. □

Notez que, par le théorème fondamental de l'algèbre, chaque polynôme de $\mathbb{C}[x]$ est scindé. Le théorème précédent implique alors que toute transformation linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} est trigonalisable.

Cours 24 (17 décembre)

3.1 Matrices diagonales et endomorphismes diagonalisables

Cours 25 (18 décembre)

4.1 Opérateurs commutatifs

Cours 26 & 27 (18 & 19 décembre)

5.1 Espaces munis d'un produit scalaire