

# Algèbre Linéaire Avancée I

## Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini  
aline.zanardini@epfl.ch

Novembre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

## Table des matières

---

<b>1 Cours 16 (17 novembre)</b>	<b>1</b>
1.1 Le noyau et l'image d'une application linéaire . . . . .	1
1.1.1 Quelques exemples . . . . .	2
1.2 Le rang d'une application linéaire . . . . .	4
1.2.1 Lien avec l'application transposée . . . . .	5
1.3 Pour réfléchir chez vous . . . . .	6
<b>2 Cours 17 (19 novembre)</b>	<b>6</b>
2.1 Inversion de matrices carrées . . . . .	6
2.2 Matrice de changement de base . . . . .	8
2.3 Pour réfléchir chez vous . . . . .	9

## Cours 16 (17 novembre)

---

On fixe un corps  $K$  et on continue avec les applications de la méthode de Gauss.

### 1.1 Le noyau et l'image d'une application linéaire

Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels de dimension finie sur  $K$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  une application  $K$ -linéaire, et  $B_V = (v_1, \dots, v_n)$  et  $B_W = (w_1, \dots, w_m)$  des bases ordonnées de  $V$  et  $W$  respectivement. On souhaite :

- Trouver une base aussi simple que possible de  $\ker(\varphi) \leq V$ , compléter cette base en une base de  $V$  et trouver  $\dim(\ker(\varphi))$ .

- Trouver une base aussi simple que possible de  $\text{im}(\varphi) \leq W$ , compléter cette base en une base de  $W$  et trouver  $\dim(\text{im}(\varphi))$ .

**Méthode :**

- Étape 1 Nous considérons la matrice  $A := [\varphi]_{B_V, B_W} \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  de l'application  $\varphi$  par rapport aux bases choisies.
- Étape 2 Puisque  $\varphi(v) = 0_W \iff A \cdot [v]_{B_V} = 0$ , on résout l'équation  $AX = 0$ , et on observe que si le rang-ligne de  $A$  est égal à  $r$ , alors l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{M}_{n \times 1}(K)$  de dimension  $n - r$  (= nombre d'inconnues libres).
- Étape 3 On trouve une base  $(u_1, \dots, u_{n-r})$  de ce sous-espace des solutions.
- Étape 4 On utilise l'isomorphisme  $f_{B_V} : V \rightarrow \mathbb{M}_{n \times 1}(K)$  donné par  $v \mapsto [v]_{B_V}$  pour trouver une base  $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-r}\}$  de  $\ker(\varphi)$  – nous considérons simplement les images inverses des vecteurs  $u_1, \dots, u_{n-r} \in \mathbb{M}_{n \times 1}(K)$  dans  $V$  sous l'isomorphisme. Autrement dit, on pose  $\tilde{v}_\ell = f_{B_V}^{-1}(\tilde{u}_\ell)$  pour  $\ell = 1, \dots, n - r$ .
- Étape 5 On peut compléter cette base en une base de  $V$  en utilisant la méthode discutée pendant le cours 15.
- Étape 6 Si  $\tilde{v}_{n-r+1}, \dots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{v}_n$  sont les vecteurs ajoutés dans Étape 5, alors en posant  $\tilde{w}_j := \varphi(\tilde{v}_{n-r+j})$ , on a que les vecteurs  $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$  forment une base de  $\text{im}(\varphi)$ .
- Étape 7 On peut utiliser la méthode discutée pendant le cours 15 pour compléter cette base en une base de  $W$ .

Alternativement, l'étape 6 ci-dessus peut être remplacée par la suivante.

- Étape 6' Si on note par  $c_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in K^m$  le vecteur dont les coordonnées se trouvent dans la  $j$ -ième colonne de la matrice  $A = (a_{ij})$ , alors on peut considérer le système de vecteurs  $(c_1, \dots, c_n)$ . En utilisant la méthode du cours 15, on peut donc trouver une base  $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_r\}$  du sous-espace  $\text{Vect}(c_1, \dots, c_n) \leq K^m$ . On utilise l'isomorphisme  $f_{B_W} : W \rightarrow \mathbb{M}_{m \times 1}(K)$  donné par  $w \mapsto [w]_{B_W}$  pour trouver une base  $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$  de  $\text{im}(\varphi)$  – nous considérons simplement les images inverses des vecteurs  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_r \in \mathbb{M}_{m \times 1}(K)$  dans  $W$  sous l'isomorphisme. C'est-à-dire qu'on pose  $\tilde{w}_k = f_{B_W}^{-1}(\tilde{c}_k)$  pour  $k = 1, \dots, r$ .

AZ: Les bases obtenues en utilisant Étape 6 ou Étape 6' ne sont pas nécessairement les mêmes.

AZ: En général, combien de bases possède un espace vectoriel ?

### 1.1.1 Quelques exemples

**Exemple 1.1.1.** Considérons une application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui, par rapport aux bases canoniques, est représentée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice  $A$  est ligne équivalente à la matrice échelonnée réduite

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on déduit que les vecteurs  $u_1 = (-2, 1, 0)$  et  $u_2 = (1, 0, 1)$  forment une base du noyau de  $\varphi$ . Pour trouver une base de  $\text{im}(\varphi)$ , on peut considérer la matrice  $B = A^t$  qui est ligne équivalente à la matrice

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour conclure que le vecteur  $\tilde{w}_1 = (1, 1, 2) = \varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0)$  forme une base de  $\text{im}(\varphi)$ . Notez que  $\{u_1, u_2, e_1\}$  est bien une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 1.1.2.** Considérons une application linéaire  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui, par rapport aux bases canoniques, est représentée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice  $A$  est ligne équivalente à la matrice échelonnée réduite

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on déduit que  $\psi$  est injective. Pour trouver une base de  $\text{im}(\psi)$ , on peut considérer la matrice  $B = A^t$  qui est ligne équivalente à la matrice

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pour conclure que les vecteurs  $\tilde{w}_1 = (1, 0, 1)$  et  $\tilde{w}_2 = (0, 1, 2)$  forment une base de  $\text{im}(\psi)$ . Alternativement, on pourrait également considérer les vecteurs  $(1, 0, 1)$  et  $(2, -1, 0) = 2\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2$ .

*AZ: Pour réfléchir : Quelles sont les opérations élémentaires que l'on effectue sur les lignes de la matrice  $B$  pour obtenir la matrice  $\tilde{R}$ ?*

**Exemple 1.1.3.** Supposons que  $K$  est un corps de caractéristique zéro<sup>1</sup>, par exemple  $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{C}$ . Considérons les espaces  $V = K[x]_{\leq 3}$  et  $W = K[x]_{\leq 2}$  et l'application linéaire  $D : V \rightarrow W$  définie par

$$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \mapsto 3a_3 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot x + a_1.$$

Soient  $B_V = (1, x, x^2, x^3)$  et  $B_W = (1, x, x^2)$  des bases canoniques (ordonnées) de  $V$  et  $W$  respectivement. Alors,

$$A = [D]_{B_V, B_W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. C'est-à-dire qu'aucun entier positif  $n$  ne vérifie l'égalité  $n \cdot 1_K = 0_K$

et en posant  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  on a que l'espace de solutions de l'équation  $AX = 0$  est égal à  $\text{Vect}(u_1)$ .

Comme l'isomorphisme  $f_{B_V} : V = K[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{M}_{4 \times 1}(K)$  défini par  $v \mapsto [v]_{B_V}$  associe à chaque polynôme  $a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$  le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ , on déduit que le vecteur  $1 = f_{B_V}^{-1}(u_1)$

forme une base de  $\ker(D) \leq V = K[x]_{\leq 3}$ . On peut compléter cette base en une base de  $V$  en ajoutant les vecteurs  $x, x^2$  et  $x^3$  et on sait donc que les vecteurs  $1 = D(x), 2x = D(x^2)$  et  $3x^2 = D(x^3)$  forment une base de  $\text{im}(D) = W$ .

Que se passe-t-il si, au contraire, nous considérons  $K = \mathbb{F}_2$  ou  $K = \mathbb{F}_3$  ?

## 1.2 Le rang d'une application linéaire

### Définition 1.2.1.

- Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . On note par  $c_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in K^m$  le vecteur dont les coordonnées se trouvent dans la  $j$ -ième colonne de  $A$ . Le **rang-colonne** de  $A$  est la dimension de l'espace  $\text{Vect}(c_1, \dots, c_n)$  comme sous-espace de  $K^m$ .
- Rappelez-vous que si  $B \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ , alors la transposée de  $B$ , notée  $B^t$ , est la matrice  $n \times m$  telle que  $(B^t)_{ij} = B_{ji}$ . Donc, le rang-colonne de  $B$  est égal au rang-ligne de  $B^t$  et le rang-ligne de  $B$  est égal au rang-colonne de  $B^t$ .

AZ: Notez que le rang-colonne d'une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  est égal à la dimension de l'image de l'application linéaire  $\varphi_A : \mathbb{M}_{n \times 1}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times 1}(K)$  définie par

$$\varphi_A : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

AZ: De plus, si  $B_{\text{can}}$  et  $C_{\text{can}}$  notent les bases canoniques de  $K^n$  et de  $K^m$  respectivement, alors le rang-colonne d'une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  est aussi égal à la dimension de l'image de l'application linéaire  $\psi : K^n \rightarrow K^m$  telle que  $[\psi]_{B_{\text{can}}, C_{\text{can}}} = A$

En particulier, si  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie sur  $K$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  est une application  $K$ -linéaire,  $B_V$  et  $B_W$  sont des bases ordonnées de  $V$  et  $W$  respectivement, et on pose  $A = [\varphi]_{B_V, B_W}$ , alors  $\dim(\text{im}(\varphi))$  est précisément le rang-colonne de  $A$ .

**Théorème 1.2.2.** Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . Le rang-ligne de  $A$  est égal au rang-colonne de  $A$ .

*Démonstration.* Posons  $r =$  le rang-ligne de  $A$  et considérons  $\varphi_A : \mathbb{M}_{n \times 1}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times 1}(K)$  l'application linéaire définie par la multiplication (à gauche) par  $A$ . Alors, comme  $\ker(\varphi_A)$  est de dimension  $n - r$ , le théorème du rang implique que le rang-ligne de  $A$  est égal au rang-colonne de  $A$ .  $\square$

Pourquoi ?

**Corollaire 1.2.3.** Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels de dimension finie sur  $K$ ,  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ , et  $B_V$  et  $B_W$  des bases ordonnées de  $V$  et  $W$  respectivement. Posons  $A = [\varphi]_{B_V, B_W}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \dim(\text{im}(\varphi)) &= \text{rang-ligne}(A) = \text{rang-colonne}(A) = \\ &= \text{rang-ligne}(A^t) = \text{rang-colonne}(A^t) = \\ &= \dim(\text{im}(\varphi^t)) \end{aligned}$$

### 1.2.1 Lien avec l'application transposée

Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels de dimension finie sur  $K$ ,  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ , et  $B_V$  et  $B_W$  des bases ordonnées de  $V$  et  $W$  respectivement. Considérons aussi les bases duales correspondantes  $B_V^*$  et  $B_W^*$ , ainsi que l'application transposée  $T^t \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ . Nous pouvons prouver ce qui suit.

(a)  $\ker(T^t) = \text{im}(T)^\perp$

(b)  $\dim(\ker(T^t)) = \dim(\ker(T)) + \dim(W) - \dim(V)$

(c)  $\text{im}(T^t) = (\ker(T))^\perp$

En particulier, si on combine le point (b) ci-dessus avec le théorème du rang appliqué à la fois à  $T$  et à  $T^t$ , on déduit que  $\dim(\text{im}(T)) = \dim(\text{im}(T^t))$  et donc on obtient une autre preuve du Théorème 1.2.2. Comment prouver (a), (b) et (c) ?

(a)

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker(T^t) &\iff T^t(\varphi) = \varphi \circ T = 0_{V^*} \quad (\text{la forme linéaire nulle}) \\ &\iff \varphi(T(v)) = 0_K \quad \forall v \in V \\ &\iff \varphi \in (\text{im}(T))^\perp = \{ \psi \in W^* = \mathcal{L}(W, K) \mid \forall w \in \text{im}(T), \psi(w) = 0_K \} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \dim(\ker(T^t)) &= \dim((\text{im}(T))^\perp) \\ &= \dim(W) - \dim(\text{im}(T)) \\ &= \dim(W) - (\dim(V) - \dim(\ker(T))) \\ &= \dim(\ker(T)) + \dim(W) - \dim(V) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \psi \in \text{im}(T^t) \leq V^* &\Rightarrow \exists \varphi \in W^* \text{ tel que } T^t(\varphi) = \psi \\ &\Rightarrow \forall v \in V, \psi(v) = \varphi(T(v)) \\ &\Rightarrow \forall v \in \ker(T), \psi(v) = \varphi(0_W) = 0_K \\ &\Rightarrow \psi \in (\ker(T))^\perp \end{aligned}$$

Donc,  $\text{im}(T^t) \subset (\ker(T))^\perp$ . Mais comme (b) implique que  $\dim(\text{im}(T)) = \dim(\text{im}(T^t))$  on a que

$$\dim(\text{im}(T^t)) = \dim(\text{im}(T)) = \dim(V) - \dim(\ker(T)) = \dim(\ker(T)^\perp).$$

Ainsi,  $\text{im}(T^t) = (\ker(T))^\perp$ .

### 1.3 Pour réfléchir chez vous

**Exercice 1.3.1.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $U \leq V$  un sous-espace. Prouvez que

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U).$$

**Exercice 1.3.2.** Pour chaque vecteur non nul  $v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ , considérez la forme linéaire  $\eta_v : K^n \rightarrow K$  définie par  $u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto v_1 \cdot u_1 + \dots + v_n \cdot u_n$ . Soient  $T \in \mathcal{L}(K^n, K^m)$  et  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  la matrice de  $T$  par rapport aux bases canoniques de  $K^n$  et de  $K^m$ . Pour chaque  $i = 1, \dots, m$ , posons  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in K^n$  le vecteur dont les coordonnées se trouvent dans la  $i$ -ème ligne de  $A$ . Montrez que  $\ker(T) = \ker(\eta_{a_1}) \cap \dots \cap \ker(\eta_{a_m})$ .

**Exercice 1.3.3.** Utilisez l'exercice précédent pour donner une description géométrique du noyau de la transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dont la matrice par rapport aux bases canoniques est  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,

## Cours 17 (19 novembre)

---

On continue avec les applications de la méthode de Gauss.  
Comme d'habitude, nous fixons un corps  $K$ .

### 2.1 Inversion de matrices carrées

**Théorème 2.1.1** (Critère d'inversibilité). Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$  une matrice carrée. Les conditions suivantes concernant  $A$  sont équivalentes.

- (i)  $A$  est inversible.
- (ii) La matrice échelonnée réduite qui est ligne équivalente à  $A$  est la matrice identité  $I_n$ .
- (iii) Il existe  $C \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$  telle que  $AC = I_n$ .
- (iv) Il existe  $B \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$  telle que  $BA = I_n$ .
- (v) Le système  $AX = 0$  possède une solution unique, la solution triviale.
- (vi) Le rang (= rang-ligne = rang-colonne) de  $A$  est égal à  $n$ .

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Par définition.

(i)  $\Rightarrow$  (iv) Par définition.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Notons  $E$  la base canonique de  $K^n$  et considérons les applications linéaires  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$  telles que  $[\varphi]_{E,E} = A$  et  $[\psi]_{E,E} = C$ . Alors, l'égalité  $AC = I_n$  implique que  $\varphi \circ \psi = \text{id}$  ce qui implique en outre que  $\varphi$  est surjective, car  $K^n = \text{im}(\underbrace{\varphi \circ \psi}_{=\text{id}}) \subset \text{im}(\varphi)$ . Mais alors,  $\varphi$  est bijective

(Corollaire 2.17, cours 9) et donc  $A$  est inversible (Exercice 2, Série 7).

(iv)  $\Rightarrow$  (i) L'argument est très similaire à celui du point précédent. Nous utilisons les mêmes notations et considérons maintenant l'application linéaire  $\gamma \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$  telle que  $[\gamma]_{E,E} = B$ . Alors, l'égalité  $BA = I_n$  implique que  $\gamma \circ \varphi = \text{id}$ , ce qui implique en outre que  $\varphi$  est injective, car

$\{0\} = \ker(\underbrace{y \circ \varphi}_{=id}) \supset \ker(\varphi)$ . Mais alors,  $\varphi$  est bijective (Corollaire 2.17, cours 9) et donc  $A$  est inversible (Exercice 2, Série 7).

- (i)  $\Rightarrow$  (v) Supposons que  $A$  est inversible avec inverse  $A^{-1}$ . On considère l'équation  $AX = 0$ ; on multiplie à gauche par  $A^{-1}$  des deux côtés et on obtient qu'il n'existe que la solution triviale  $X = 0$ .
- (v)  $\Rightarrow$  (vi) On sait que la dimension de l'espace des solutions du système est égale à  $n - r$ , où  $r$  est le rang de  $A$ . Mais l'espace des solutions est le sous-espace nul et donc de dimension 0. On déduit que  $n = r$ , c.-à-d. que la matrice  $A$  est de rang  $n$ .
- (vi)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons maintenant que le rang de  $A$  est égal à  $n$ . On effectue les opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  pour obtenir une matrice échelonnée réduite  $R$ . Comme le rang de  $R$  est aussi  $n$ , on déduit que  $R = I_n$ .
- (ii)  $\Rightarrow$  (iv) Si  $A$  est ligne équivalente à  $I_n$ , alors il existe des matrices élémentaires  $E_1, \dots, E_k$  telles que  $E_1 \cdot \dots \cdot E_k \cdot A = I_n$ . Autrement dit, nous pouvons prendre  $B = E_1 \cdot \dots \cdot E_k$ . Cette matrice satisfait à la condition de (iv). □

**Corollaire 2.1.2.** *Toute matrice inversible est égale à un produit de matrices élémentaires.*

Ces résultats nous permettent de déterminer si une matrice donnée est inversible et de trouver l'inverse lorsqu'elle existe.

---

**Méthode :** Pour déterminer si une matrice  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$  est inversible, et pour trouver son inverse lorsqu'elle existe, on construit une matrice augmentée en plaçant la matrice originale  $A$  à gauche et la matrice identité  $I_n$  à droite. On applique ensuite des opérations élémentaires aux lignes de cette matrice augmentée pour transformer  $A$  en une matrice échelonnée réduite  $R$ . Si  $A$  est inversible, alors  $R = I_n$  et le membre de droite de la matrice augmentée finale sera exactement l'inverse de  $A$ . Si  $R \neq I_n$ , alors on sait que  $A$  n'est pas inversible.

---

**Exemple 2.1.3.** Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ . Alors, la matrice augmentée

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

est ligne équivalente à la matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Par conséquent,  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Matrice de changement de base

Une fois que l'on sait inverser les matrices, cela nous donne un outil pour déterminer les matrices de changement de base.

**Exemple 2.2.1.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique (ordonnée) de  $\mathbb{R}^3$  et considérons une autre base  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$\begin{cases} v_1 = (1, 2, 3) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \\ v_2 = (0, 1, 1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ v_3 = (1, 0, -1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \end{cases}$$

Alors, la matrice de passage  $[\text{id}]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

En effet, on a que

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0) = (1/2) \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + (1/2) \cdot v_3 \\ e_2 = (0, 1, 0) = (-1/2) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (1/2) \cdot v_3 \\ e_3 = (0, 0, 1) = (1/2) \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + (-1/2) \cdot v_3 \end{cases}.$$

Comment peut-on trouver des scalaires  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  tels que  $e_j = a_{1j} \cdot v_1 + a_{2j} \cdot v_2 + a_{3j} \cdot v_3$ ? On peut résoudre l'équation

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{=P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2.2.2.** Considérons des bases ordonnées  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (2, 2x, 3x^2 - 1, x^3 + 1)$  et  $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, x - 1, x^2 + 2, 2x^3)$  de  $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ . Alors, la matrice de passage  $[\text{id}]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  est la matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{=P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ x & 0 & 2 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 3 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que si on pose  $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ , alors

$$\begin{aligned} [\text{id}]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= [\text{id}]_{\mathcal{C}, \mathcal{E}}^{-1} \cdot [\text{id}]_{\mathcal{B}, \mathcal{E}} \\ &= [\text{id}]_{\mathcal{E}, \mathcal{C}} \cdot [\text{id}]_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Notez qu'on peut également résoudre chacun des quatre systèmes linéaires définis par des quatre équations  $v_j = a_{1j} \cdot w_1 + a_{2j} \cdot w_2 + a_{3j} \cdot w_3 + a_{4j} \cdot w_4$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{pmatrix} = [v_j]_{\mathcal{E}}.$$

Cette méthode prend cependant généralement plus de temps.

### 2.3 Pour réfléchir chez vous

**Exercice 2.3.1.** Supposons que  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  soient des bases ordonnées d'un  $K$ -espace vectoriel  $V$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$  telle que  $\varphi(v_i) = u_i$  pour chaque  $i = 1, \dots, n$ . Démontrer que

$$[\varphi]_{\mathcal{C}, \mathcal{C}} = [\text{id}]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

**Exercice 2.3.2.** Démontrer que les conditions du Théorème 2.1.1 sont équivalentes à la condition suivante : Pour tout  $(b_1, \dots, b_n) \in K^n$ , il existe une solution au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ b_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{array} \right. .$$