

# Algèbre Linéaire Avancée I

## Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini  
aline.zanardini@epfl.ch

Novembre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

## Table des matières

---

<b>1 Cours 14 (3 novembre)</b>	<b>2</b>
1.1 La méthode de Gauss . . . . .	2
1.2 Pour réfléchir chez vous . . . . .	4
<b>2 Cours 15 (5 novembre)</b>	<b>5</b>
2.1 Applications de la méthode de Gauss . . . . .	5
2.1.1 Systèmes d'équations linéaires . . . . .	5
2.1.2 Base d'un sous-espace défini par un système de générateurs . . . . .	9

# Cours 14 (3 novembre)

## 1.1 La méthode de Gauss

On fixe un corps  $K$ .

**Théorème 1.1.1.** *Toute matrice  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  est ligne équivalente à une matrice  $R \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  échelonnée réduite. De plus, la matrice  $R$  est déterminée de manière unique.*

AZ: Rappelez-vous qu'une matrice  $R = (R_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  échelonnée réduite si, soit chaque entrée dans  $R$  est nulle, soit il existe un entier positif  $r$ , avec  $1 \leq r \leq m$ , et  $r$  entiers positifs  $j_1, \dots, j_r$ , avec  $1 \leq j_i \leq n$ , tels que :

(e1)  $R_{ij} = 0$  si  $i > r$  ou  $j < j_i$ ;

(e2)  $R_{k j_i} = \delta_{ki}$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq k \leq r$ ;

(e3)  $j_1 < \dots < j_r$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . On suppose  $A \neq 0$  car sinon  $A$  est déjà échelonnée réduite.

Nous pouvons procéder de manière algorithmique :

Étape 1 Soit  $j_1$  le plus petit indice d'une colonne pour lequel un coefficient de  $A$  est non nul, disons  $a_{i j_1} \neq 0$ . Par une opération de type I (échanger les lignes 1 et  $i$ ), on est ramenée au cas où  $a_{1 j_1} \neq 0$  (le pivot associé au plus petit échelon  $j_1$  est en première ligne).

Étape 2 Par une opération de type II, en multipliant la première ligne par  $a_{1 j_1}^{-1}$ , on est ramené au cas où  $a_{1 j_1} = 1$  (le pivot de la première ligne est égal à 1).

Étape 3 Par une suite d'opérations de type III, on annule tous les autres coefficients de la  $j_1$ -ème colonne ( $A_k \rightarrow -a_{k j_1} A_1 + A_k$ ). On se retrouve ainsi avec une matrice de la forme

$$A^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{j_1}{\textcircled{1}} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \dots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Étape 4 Posons  $B_{2 \rightarrow m}$  la matrice constituée des lignes 2 à  $m$  de  $A^{(1)}$ . Si  $B_{2 \rightarrow m} = 0$ , alors  $A^{(1)}$  est échelonnée réduite. Sinon, soit  $j_2$  le plus petit indice d'une colonne pour laquelle  $B_{2 \rightarrow m}$  possède un coefficient non nul. Alors  $j_1 < j_2$ . On applique à la matrice  $B_{2 \rightarrow m}$  la méthode utilisée ci-dessus (étapes 1, 2 et 3), ce qui crée (en reportant les opérations sur la matrice  $A^{(1)}$ ) une matrice où nous avons un pivot  $a_{1 j_1} = 1$  et  $a_{2 j_2} = 1$ .

Étape 5 Avec une opération de type III (notamment  $A_1 \rightarrow -a_{1 j_2} A_2 + A_1$ ), on annule le coefficient  $a_{1 j_2}$  à la ligne 1, ce qui crée une matrice de la forme

$$A^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{j_1}{\textcircled{1}} & * & \dots & * & \overset{j_2}{0} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \overset{j_2}{\textcircled{1}} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

Notez que cette dernière opération ne modifie pas les éléments sur la première ligne précédant la colonne  $j_2$ , car tous les coefficients correspondants sur la ligne 2 sont nuls.

Étape 6 On répète ce procédé jusqu'à ce qu'on obtienne une matrice échelonnée réduite, disons  $A^{(k)}$ , telle que soit  $k = m$ , soit la matrice  $B_{k \rightarrow m}$  constituée des lignes  $k$  à  $m$  de  $A^{(k)}$  est la matrice nulle.

AZ: ⚠ Dans la preuve, on abuse légèrement de la notation et après chaque opération élémentaire, on appelle encore les coefficients de la matrice résultante  $a_{ij}$ .

AZ: L'unicité de  $R$  découle de sa construction et sera admise sans preuve.

□

**Exemple 1.1.2.** Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ . On effectue les opérations

suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -3L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -L_2 + L_1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow 1/4 \times L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Corollaire 1.1.3.** Soit  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . Alors il existe une matrice inversible  $P \in \text{GL}(m, K)$  telle que  $PA$  est échelonnée réduite.

**Exemple 1.1.4.** Dans l'Exemple 1.1.2 on a que  $P$  est la matrice :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notez qu'on peut aussi trouver  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$  en résolvant le système linéaire suivant avec

12 équations à 9 inconnues :

$$\begin{aligned} 0 \cdot p_{11} + 3 \cdot p_{12} + 1 \cdot p_{13} &= 1 \\ 1 \cdot p_{11} + 4 \cdot p_{12} + 1 \cdot p_{13} &= 0 \\ 0 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{12} - 1 \cdot p_{13} &= 0 \\ 2 \cdot p_{11} + 2 \cdot p_{12} + 0 \cdot p_{13} &= -2 \\ \hline 0 \cdot p_{21} + 3 \cdot p_{22} + 1 \cdot p_{23} &= 0 \\ 1 \cdot p_{21} + 4 \cdot p_{22} + 1 \cdot p_{23} &= 1 \\ 0 \cdot p_{21} + 1 \cdot p_{22} - 1 \cdot p_{23} &= 0 \\ 2 \cdot p_{21} + 2 \cdot p_{22} + 0 \cdot p_{23} &= 2 \\ \hline 0 \cdot p_{31} + 3 \cdot p_{32} + 1 \cdot p_{33} &= 0 \\ 1 \cdot p_{31} + 4 \cdot p_{32} + 1 \cdot p_{33} &= 0 \\ 0 \cdot p_{31} + 1 \cdot p_{32} - 1 \cdot p_{33} &= 1 \\ 2 \cdot p_{31} + 2 \cdot p_{32} + 0 \cdot p_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Puisque, parmi ces équations, il y a exactement 9 qui ne sont pas redondantes, ce système a une solution unique.

**Remarque 1.**  En général, la matrice  $P$  n'est pas unique. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ est ligne équivalente à } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -7/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si je considère les matrices  $P_1 = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ , alors

$$P_1 A = P_2 A = R.$$

En tout cas, une matrice  $P$  telle que  $PA = R$  est entièrement déterminée par la séquence d'opérations élémentaires donnée dans la preuve du Théorème 1.1.1 que nous avons choisi de suivre (dans le cas où il y a place pour des choix).

## 1.2 Pour réfléchir chez vous

**Exercice 1.2.1.** Considérez la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si les lignes  $A_1, A_2, A_3$  de  $A$ , considérées comme des vecteurs dans  $\mathbb{M}_{1 \times 5}(\mathbb{R})$ , sont libres ou non, et trouver la dimension du sous-espace  $\text{Vect}(A_1, A_2, A_3) \leq \mathbb{M}_{1 \times 5}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^5$ .

**Exercice 1.2.2.** Considérez la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Montrez que  $B$  est ligne équivalente à matrice échelonnée réduite  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (ii) Montrez que  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est une base du sous-espace de  $\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$  engendré par les colonnes de  $B$ .
- (iii) Décrivez le sous-espace de  $\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$  engendré par les colonnes de  $R$ .
- (iv) Dédisez que les opérations élémentaires sur les lignes peuvent modifier l'espace engendré par les colonnes d'une matrice.

## Cours 15 (5 novembre)

---

### 2.1 Applications de la méthode de Gauss

On fixe un corps  $K$ .

#### 2.1.1 Systèmes d'équations linéaires

Étant donné un système linéaire avec  $m$  équations à  $n$  inconnues :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

où  $a_{ij}, b_i \in K$ , on souhaite résoudre l'équation matricielle correspondante  $AX = B$ , c.-à-d., on pose

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K) \text{ la matrice des coefficients, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ le vecteur des inconnues, et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

le vecteur des termes constants.

Tout d'abord, on observe que la matrice  $A$  représente une application linéaire  $\varphi : K^n \rightarrow K^m$  (par rapport aux bases canoniques des deux espaces). Donc, l'existence d'une solution signifie qu'il existe  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  tel que  $\varphi(x) = \underbrace{(b_1, \dots, b_m)}_{:=b} \in K^m$ . C'est-à-dire que  $b$  appartient à l'image de

$\varphi$ . Donc, si  $b \notin \text{im}(\varphi)$ , alors l'équation n'a aucune solution et si  $b \in \text{im}(\varphi)$ , alors il existe au moins une solution. Dans le cas particulier où  $b = (0, \dots, 0)$ , il existe au moins une solution car  $\varphi(0) = 0$ . Même l'ensemble des solutions est égal au noyau de  $\varphi$ .

**Corollaire 2.1.1.** *Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  non nulle et  $m < n$ , alors le système homogène d'équations linéaires associé,  $AX = 0$ , a une solution non triviale.*

AZ: Notez : comme on peut considérer la multiplication (à gauche) par  $A$  comme une application linéaire  $\mathbb{M}_{n \times 1}(K) \simeq K^n \rightarrow \mathbb{M}_{m \times 1}(K) \simeq K^m$ , si  $m < n$ , alors cette application n'est pas injective, donc son noyau n'est pas trivial (voir Corollaire 2.1.5, cours 9). Mais la méthode reste nécessaire et est très utile pour trouver concrètement une telle solution.

*Démonstration.* Soit  $R = (R_{ij})$  une matrice échelonnée réduite, qui est ligne équivalente à  $A$ . Alors, les systèmes  $AX = 0$  et  $RX = 0$  ont les mêmes solutions. Si  $r$  est le nombre de lignes de  $R$ , alors  $r \leq m$ , et puisque  $m < n$ , on a  $r < n$ . Maintenant, on observe que le système  $RX = 0$  a exactement  $r$  équations non triviales. Si nous supposons que l'entrée non nulle de la ligne  $i$  apparaît dans la colonne  $j_i$ , alors ces équations sont :

Pourquoi ?

$$\begin{aligned} x_{j_1} + \sum_{j=j_1+1}^n R_{1j}x_j &= 0 \\ &\vdots \\ x_{j_r} + \sum_{j=j_r+1}^n R_{rj}x_j &= 0 \end{aligned}$$

En plus, on observe que pour  $1 \leq i \leq r$  et pour  $j_i < j \leq n$  on a que  $R_{ij} = 0$  si  $j \in \{j_{i+1}, \dots, j_r\}$ , donc si  $y_1, \dots, y_{n-r}$  désignent les  $n - r$  inconnues différentes de  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ , ces équations peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned} x_{j_1} + \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{1j}y_j &= 0 \\ &\vdots \\ x_{j_r} + \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{rj}y_j &= 0, \end{aligned}$$

Mais alors, comme toutes les solutions du système d'équations  $RX = 0$  sont obtenues en attribuant n'importe quelle valeur à  $y_1, \dots, y_{n-r}$  et puis en calculant les valeurs correspondantes de  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ , il s'ensuit qu'il y aura toujours une solution non triviale : puisque  $r < n$ , on peut choisir  $x_j = y_j$  qui ne fait pas partie des  $r$  inconnues  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ , et on peut alors construire une solution avec  $x_j = 1$ .  $\square$

**Définition 2.1.2.** Dans la preuve du Corollaire 2.1.1, les inconnues  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$  qui apparaissent aux échelons du système échelonné réduit  $RX = 0$ , s'appellent les inconnues principales et les autres  $y_1, \dots, y_{n-r}$  (s'il y en a) s'appellent les inconnues libres.

**Exemple 2.1.3.** Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ . Alors, cette matrice est ligne équivalente à la matrice échelonnée réduite suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Donc toutes les solutions du système  $AX = 0$  ont la forme  $X = \begin{pmatrix} -x_4 \\ 4x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , où  $x_4 \in \mathbb{R}$ .

En posant  $x_4 = 1$ , on obtient la solution non triviale  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 4, -3, 1)$ . Nous pouvons facilement vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2.1.4.** Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 5}(\mathbb{R})$ . Alors, cette matrice est ligne équivalente à la matrice échelonnée réduite suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -7/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 5}(\mathbb{R}).$$

Donc toutes les solutions du système  $AX = 0$  ont la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 7/6 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où  $x_1, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ , car les deux équations non triviales sont :

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-7/6) \cdot x_4 + (-1/3) \cdot x_5 = 0$$

et

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (2/3) \cdot x_4 + (1/3) \cdot x_5 = 0.$$

Quelle est la méthode, en général, pour trouver les solutions du système  $AX = B$ ?

**Méthode :** Pour résoudre  $AX = B$  par la méthode de Gauss, on forme la matrice augmentée du système  $(A|B)$ , où  $B$  est ajoutée en tant que dernière colonne. Ensuite, on réduit cette nouvelle matrice à sa forme échelonnée réduite  $(R|\tilde{B})$ .

**Définition 2.1.5.** Soit  $r$  le rang-ligne de la matrice  $R$ , et soient  $j_1, \dots, j_r$  les échelons de  $R$ . Les inconnues  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$  s'appellent les inconnues principales et les autres (s'il y en a) s'appellent les inconnues libres (qui sont  $n - r$  en nombre).

**Description des solutions :**

- Cas A Si l'un des nouveaux termes constants  $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_m$  n'est pas nul, disons  $\tilde{b}_i$ , alors l'équation  $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_m = 0 = \tilde{b}_i$  implique que le système n'a aucune solution.
- Cas B Si  $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$ , ou si  $r = m$ , le système possède au moins une solution. Pour décrire les solutions, on donne des valeurs arbitraires aux inconnues libres et on détermine la valeur de chaque inconnue principale en fonction d'inconnues libres. Donc s'il existe des inconnues libres, il y a plus d'une solution et s'il n'existe aucune inconnue libre ( $\iff r = n$ ), le système possède une solution unique.

**Exemple 2.1.6.** Considérons la matrice de coefficients  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  et le vecteur

de termes constants  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors, la matrice augmentée associée au système  $A \cdot X = B$  est la

matrice  $\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$ . De plus, cette matrice est ligne équivalente à matrice échelonnée réduite

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Cela implique que les solutions du système  $AX = B$  sont données par

$$\mathbb{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \ni X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } x_3 \in \mathbb{R} \text{ est quelconque.}$$

En revanche, notez que si nous considérons plutôt  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  comme le vecteur de termes constants,

alors la matrice augmentée associée au système  $A \cdot X = C$  est ligne équivalente à matrice échelonnée réduite  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ , et donc le système  $AX = C$  n'a aucune solution.

## 2.1.2 Base d'un sous-espace défini par un système de générateurs

### Définition 2.1.7.

- (D1) Un système de vecteurs dans un  $K$ -espace vectoriel  $V$  est une liste (uplet) ordonnée de vecteurs  $(v_1, \dots, v_m)$  de  $V$ .
- (D2) On dit qu'un système de vecteurs  $(v_1, \dots, v_m)$ , avec  $v_i \in K^n$ , est échelonné (réduit) si la matrice  $m \times n$  dont la  $i$ -ème ligne contient les coordonnées de  $v_i$  est échelonnée (réduite).
- (D3) Pour un système de vecteurs  $(v_1, \dots, v_m)$  dans  $V$ ,  $\dim(\text{Vect}(v_1, \dots, v_m))$  s'appelle le rang du système. Notez que le rang du système  $(v_1, \dots, v_m)$  est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants (libres) dans l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_m\}$ .
- (D4) Soit  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . On regarde les lignes  $A_1, \dots, A_m$  de  $A$  comme des vecteurs de  $K^n$  ou de  $\mathbb{M}_{1 \times n}(K)$ . On dit que le rang-ligne de  $A$  est le rang du système  $(A_1, \dots, A_m)$ . Notez que le rang-ligne de  $A$  est égal au rang-ligne de  $R$ , où  $R$  est la forme échelonnée réduite de  $A$ , et que le rang-ligne de  $R$  est le nombre d'échelons de  $R$ .

Soit  $(v_1, \dots, v_m)$  un système de vecteurs dans  $K^n$ . On souhaite :

- Trouver une base aussi simple que possible de  $U := \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ .
- Trouver  $\dim(U)$ .
- Compléter cette base en une base de  $K^n$ .

### Méthode :

- Étape 1 On écrit les coordonnées des vecteurs  $v_1, \dots, v_m$  dans les lignes d'une matrice  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ , c'est-à-dire que si  $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ , on pose  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ , où  $A_i = (a_{i1} \ \dots \ a_{in})$ .
- Étape 2 On effectue les opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  pour la transformer en une matrice échelonnée réduite  $R$ .
- Étape 3 On observe que si  $w_i \in K^n$  est le vecteur dont les coordonnées sont données par la  $i$ -ème ligne  $R_i$  de  $R$ , alors  $\text{Vect}(w_1, \dots, w_m) = U$ . Donc les vecteurs non nuls  $w_i$  forment une base de  $U$ .
- Étape 4 Pour compléter cette base en une base de  $K^n$ , on ajoute tous les vecteurs canoniques  $e_\ell$  tels que  $\ell$  n'est pas un échelon de la matrice  $R$ .

Plus généralement, soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  avec base ordonnée  $B = (v_1, \dots, v_n)$ . On a un isomorphisme  $\varphi_B : V \rightarrow K^n$  donné par

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Autrement dit, cette fonction associe à chaque  $v \in V$  son « vecteur de coordonnées » (par rapport à la base  $B$ ) dans  $K^n$  et a été beaucoup utilisée pendant le cours.

Soit maintenant  $(u_1, \dots, u_m)$  un système de vecteurs de  $V$ . Alors, comme  $\varphi$  est bijective, on a que  $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_m)) = \dim(\text{Vect}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)))$ . De plus, nous savons que cette dimension est égale au rang-ligne de la matrice avec lignes données par  $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ . Ainsi, on peut utiliser la méthode développée ci-dessus pour déterminer une base de  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$  ainsi que pour compléter cette base en une base de  $V$ .

**Exemple 2.1.8.** Considérons le système  $(v_1, v_2, v_3)$  dans  $K^4$  où  $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 3, 1, -2)$  et  $v_3 = ()$ . On souhaite :

- Trouver une base aussi simple que possible de  $U := \text{Vect}(v_1, v_2)$ .
- Trouver  $\dim(U)$ .
- Compléter cette base en une base de  $K^4$ .

Étape 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Étape 2 Cette matrice est ligne équivalente à la matrice échelonnée réduite

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Les vecteurs  $w_1 = (1, 0, -1, 0)$  et  $w_2 = (0, 1, 2/3, -2/3)$  forment une base de  $U$

Étape 4 Pour compléter cette base en une base de  $K^4$ , on ajoute les vecteurs de la base canonique  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$  et  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

**Exemple 2.1.9.** Considérons maintenant l'espace vectoriel  $V = \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{F}_3)$  sur le corps  $\mathbb{F}_3$  avec base ordonnée la base canonique  $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Considérons les vecteurs  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . L'isomorphisme  $\varphi_B : V \rightarrow (\mathbb{F}_3)^4$  déterminé par  $B$  est tel que  $u_1 \mapsto v_1 = (1, 1, 0, 0)$  et  $u_2 \mapsto v_2 = (1, 2, 0, 0)$ . Donc, comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si nous posons  $w_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$  et  $w_2 = e_2 = (0, 1, 0, 0)$ , on a que  $\{\varphi_B^{-1}(w_1), \varphi_B^{-1}(w_2)\} = \{E_{11}, E_{12}\}$  est une base de  $\text{Vect}(u_1, u_2)$ .