

# Algèbre Linéaire Avancée I

## Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini  
aline.zanardini@epfl.ch

Octobre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

### Cours 13 (28 octobre)

---

On fixe un corps  $K$ .

#### Notation.

(N1) Soit  $X$  un ensemble non vide quelconque. Pour  $a, b \in X$ , le symbole de Kronecker  $\delta_{a,b}$  désigne le nombre réel tel que

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq b \\ 1, & \text{si } a = b \end{cases}$$

(N2) Pour chaque  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ , on définit une matrice  $E_{ij} \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  telle que le seul coefficient non nul soit celui trouvé dans la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne; et, de plus, ce coefficient est égal à 1.

(N3) On note que  $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  est une base de  $\mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . Je ferai référence à cette base comme la base « standard ».

(N4) Pour

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n}(K),$$

on note  $A = (a_{ij})$  ou  $A = (A_{ij})$  selon les besoins, et on note  $A_i$  la  $i$ -ème ligne de  $A$ .

On définit trois types d'opérations sur les lignes d'une matrice  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ , appelées **opérations élémentaires**.

- **Type I** Échanger deux lignes de la matrice.
- **Type II** Multiplier une ligne de la matrice par un scalaire non nul  $\lambda \in K$ .
- **Type III** Additionner à une ligne de la matrice un multiple scalaire d'une autre ligne de la matrice.

Une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice est donc un type particulier de fonction (règle)  $e$  qui associe à chaque matrice  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  une matrice  $e(A) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . On peut décrire précisément  $e$  dans les trois cas comme suit :

Type I Si on échange  $A_r$  et  $A_s$ , alors on a que  $e(A)_{ij} = A_{ij}$  si  $i$  est différent de  $r$  et de  $s$ , que  $e(A)_{rj} = A_{sj}$  et que  $e(A)_{sj} = A_{rj}$ .

Type II Si on multiplie  $A_r$  par  $\lambda \in K^\times$ , alors on a que  $e(A)_{ij} = A_{ij}$  si  $i \neq r$ , et que  $e(A)_{rj} = \lambda A_{rj}$ .

Type III Si on additionne  $\lambda \cdot A_s$  à la ligne  $A_r$ , alors on a que  $e(A)_{ij} = A_{ij}$  si  $i \neq r$ , et que  $e(A)_{rj} = A_{rj} + \lambda A_{sj}$ .

Ici,  $K^\times = K \setminus \{0\}$  est le groupe multiplicatif du corps  $K$ .

**Remarque 1.** On note que ces trois opérations sont réversibles dans le sens qu'il existe une opération élémentaire qui renvoie à la matrice de départ.

- Le type I est son propre inverse.
- Pour le type II, on multiplie la même ligne par  $\lambda^{-1}$ .
- Pour le type III, si on additionne  $\lambda \cdot A_s$  à la ligne  $A_r$ , alors l'opération inverse est d'ajouter  $-\lambda \cdot A_s$  à  $A_r$ .

**⚠** Pour définir  $e(A)$ , le nombre de colonnes de  $A$  n'est pas vraiment important, mais le nombre de lignes de  $A$  est crucial. Pour simplifier la discussion, nous admettrons qu'une opération élémentaire  $e$  est définie sur la classe de toutes les matrices  $m \times n$ , pour un  $m$  fixé mais  $n$  quelconque. Autrement dit, une opération  $e$  particulière est définie sur la classe de toutes les matrices à coefficients dans  $K$  avec  $m$  lignes.

**Définition 1.0.1.** Une matrice carrée  $L \in \mathbb{M}_{m \times m}(K)$  est dite élémentaire si elle peut être obtenue en effectuant une seule opération élémentaire sur une seule ligne de la matrice identité  $I_m$ .

Avec tout ce qui précède à l'esprit, on peut maintenant prouver le résultat suivant.

**Proposition 1.0.2.** Soit  $e$  une opération élémentaire. Alors, il existe une matrice élémentaire inversible  $L \in GL(m, K)$  telle que  $e(A) = L \cdot A$  pour toutes  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . En particulier, pour chaque  $n$ ,  $e$  définit une application  $\mathbb{M}_{m \times n}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  qui est linéaire et bijective. De plus, on a que

Type I L'opération  $e : A_r \leftrightarrow A_s$  est représentée par la matrice  $L = (L_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times m}(K)$  telle que  $L_{ii} = 1$  si  $i \notin \{r, s\}$ ,  $L_{rs} = L_{sr} = 1$ , et tous les autres coefficients sont nuls.

Type II L'opération  $e : A_r \rightarrow \lambda \cdot A_r$  (avec  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ ) est représentée par la matrice  $L = (L_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times m}(K)$  telle que

$$L_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \neq r \\ 0, & \text{si } i \neq j \\ \lambda, & \text{si } i = j = r \end{cases}$$

Type III L'opération  $e : A_r \rightarrow \lambda \cdot A_s + A_r$  est représentée par la matrice  $L = I_m + \lambda E_{rs} \in \mathbb{M}_{m \times m}(K)$ .

*Démonstration.* Étant donné une opération élémentaire  $e$ , comment trouver la matrice  $L$  correspondante ? Eh bien, la matrice est simplement la matrice  $e(I_m)$  !

Pour démontrer la Proposition 1.0.2, le point crucial est que l'élément  $(LA)_{ij}$  de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne de la matrice produit  $LA$  est obtenu à partir de la  $i$ -ième ligne de  $L$  et de la  $j$ -ième colonne de  $A$ . Les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes doivent être traités séparément. Nous allons donner une démonstration détaillée pour une opération de type III. Les deux autres cas sont encore plus faciles à traiter et seront laissés comme exercices. Supposons que  $r \neq s$  et que  $e$  soit l'opération  $A_r \rightarrow \lambda \cdot A_s + A_r$ , c.-à-d. « remplacement de  $A_r$  par  $\lambda \cdot A_s + A_r$  ». Alors, en posant  $L = e(I_m)$ , on a que

$$L_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & \text{si } i \neq r \\ \delta_{rk} + \lambda \delta_{sk}, & \text{si } i = r \end{cases}$$

Donc,  $L = I_m + \lambda E_{rs}$  et

$$(LA)_{ij} = \sum_{k=1}^m L_{ik} A_{kj} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{si } i \neq r \\ A_{rj} + \lambda A_{sj}, & \text{si } i = r \end{cases}$$

Autrement dit,  $L \cdot A = e(A)$ . □

**Définition 1.0.3.** On dit que deux matrices  $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  sont lignes équivalentes (ou équivalentes par lignes) si  $B$  peut être obtenue à partir de  $A$  en faisant une suite (finie) d'opérations élémentaires. Autrement dit, si et seulement si  $B = P \cdot A$ , où  $P \in GL(m, K)$  est un produit de matrices élémentaires  $m \times m$ .

**Remarque 2.** Soient  $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  des matrices lignes équivalentes. Alors, chaque ligne de  $B$  est une combinaison linéaire des lignes de  $A$  et chaque ligne de  $A$  est une combinaison linéaire des lignes de  $B$ . En particulier,  $\text{Vect}(A_1, \dots, A_m) = \text{Vect}(B_1, \dots, B_m)$ .

**Remarque 3.** Comme toutes les opérations élémentaires sont réversibles, « être lignes équivalentes » définit une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\mathbb{M}_{m \times n}(K)$ . En particulier, la relation est symétrique, c'est-à-dire que si on peut obtenir la matrice  $B$  à partir de la matrice  $A$  par une suite d'opérations élémentaires, on peut également obtenir  $A$  à partir de  $B$ .

Si  $r = s$   
l'opération  
est de type  
II

**Définition 1.0.4.** On dit qu'une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  est **échelonnée réduite** si soit  $A = 0$  soit les quatre propriétés suivantes sont vérifiées.

- (i) La première entrée non nulle dans chaque ligne non nulle de  $A$  est égale à 1 – ces coefficients s'appellent les pivots;
- (ii) chaque colonne de  $A$  contenant un pivot a toutes ses autres entrées égales à 0;
- (iii) chaque ligne de  $A$  dont toutes les entrées sont égales à 0 apparaît sous chaque ligne ayant une entrée différente de zéro; et
- (iv) si les lignes  $1, \dots, r$  sont les lignes non nulles de  $A$ , et si le pivot de la ligne  $i$  se trouve dans la colonne  $j_i$ , pour  $i = 1, \dots, r$ , alors  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$  – ces entiers  $j_1, \dots, j_r$  s'appellent les échelons de la matrice  $A$ .

Notez qu'on peut également décrire une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$  échelonnée réduite comme suit. Soit chaque entrée dans  $A$  est nulle, soit il existe un entier positif  $r$ , avec  $1 \leq r \leq m$ , et  $r$  entiers positifs  $j_1, \dots, j_r$ , avec  $1 \leq j_i \leq n$ , tels que :

- (e1)  $a_{ij} = 0$  si  $i > r$  ou  $j < j_i$ ;
- (e2)  $a_{kj_i} = \delta_{ki}$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq k \leq r$ ;
- (e3)  $j_1 < \dots < j_r$ .

**Exemple 1.0.5.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est échelonnée réduite. Par contre, la matrice

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas échelonnée réduite.

**Théorème 1.0.6.** Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée réduite. Autrement dit, toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée réduite par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice.

*Démonstration.* La preuve sera donnée lors du prochain cours. □

## 1.1 Pour réfléchir chez vous

**Exercice 1.1.1.** Pouvez-vous décrire toutes les matrices élémentaires  $2 \times 2$  ?

**Exercice 1.1.2.** Soit  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(K)$ . Prouvez qu'il existe des matrices  $A, B \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(K)$  telles que  $C = AB - BA$  si et seulement si  $c_{11} + c_{22} = 0$ .

**Exercice 1.1.3.** Soit  $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(K)$ , et supposons que les lignes de la matrice  $A$  forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants dans  $K^2$ . Prouvez que la matrice  $A$  est inversible. Et si  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$  ?