

Algèbre Linéaire Avancée I

Math 110 (b)

Dr. Aline Zanardini
aline.zanardini@epfl.ch

Décembre 2025

AZ: Vous êtes libres de me signaler toute coquille et erreur par e-mail.

Cours 21 (1er décembre)

On fixe un corps K . On considère un K -espace vectoriel V et l'anneau unitaire $\mathcal{L}(V, V)$. Notez que si V est de dimension finie n , cet anneau est isomorphe à l'anneau $\mathbb{M}_{n \times n}(K)$.

1.1 Vecteurs propres et valeurs propres

Les matrices les plus faciles à « manipuler » algébriquement sont les matrices diagonales. Ensuite, les matrices triangulaires présentent également quelques propriétés utiles. Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ est une matrice diagonale ou triangulaire supérieure, alors, par l'isomorphisme entre $\mathbb{M}_{n \times n}(K)$ et $\mathcal{L}(K^n, K^n)$ associé au choix de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de K^n , il existe une unique application linéaire $\varphi : K^n \rightarrow K^n$ telle que $[\varphi]_{\mathcal{E}} = A$. D'après les hypothèses sur la matrice A , on a que $\varphi(e_1) = a_{11} \cdot e_1$ et donc $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(\varphi(e_1))$. Cette observation motive la définition suivante.

Définition 1.1.1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$.

- (i) On dit que $v \in V$ est un **vecteur propre** de φ si $v \neq 0_V$ et $\text{Vect}(v) = \text{Vect}(\varphi(v))$. C'est-à-dire que v est non-nul et $\varphi(v)$ est un multiple scalaire de v . Ce qui revient à dire que $v \neq 0$ et qu'il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $\varphi(v) = \lambda \cdot v$.
- (ii) Le scalaire λ de (i) s'appelle la **valeur propre** de φ associée au vecteur propre v .
- (iii) Si λ est une valeur propre de φ , alors le sous-espace $E_\lambda := \{v \in V; \varphi(v) = \lambda \cdot v\} \leq V$ s'appelle l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ .

Notez qu'on a une notion analogue pour les matrices carrées $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ en considérant l'application linéaire $\varphi_A : \mathbb{M}_{n \times 1}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{n \times 1}(K)$ canoniquement associée à A et définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, $0 \neq v \in \mathbb{M}_{n \times 1}(K)$ est un vecteur propre de A si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $\varphi_A(v) = \lambda \cdot v$. Si tel est le cas, λ s'appelle la valeur propre de A associée au vecteur propre v .

Exercice 1.1.2. Montrez que 0_K est une valeur propre d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ si et seulement si φ n'est pas injective.

Le résultat suivant découle directement des définitions ci-dessus.

Théorème 1.1.3. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ et $\lambda \in K$. Alors λ est une valeur propre de φ si et seulement si l'application linéaire $\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$ n'est pas inversible. Si et seulement si $\ker(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{0\}$.

Démonstration. Par définition, on a que $\lambda \in K$ est une valeur propre de φ si et seulement s'il existe $v \in V$ non nul tel que $\varphi(v) = \lambda \cdot v$. Donc, si et seulement si

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda \text{id}_V)(v) = 0 &\iff v \in \ker(\varphi - \lambda \text{id}_V) \\ &\iff \ker(\varphi - \lambda \text{id}_V) \neq \{0\} \\ &\iff \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V \text{ n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

□

Dans le cas où $\dim(V) = n$, ce résultat nous fournit une méthode pour déterminer les valeurs propres.

Proposition 1.1.4. Supposons $\dim(V) = n$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$, fixons une base ordonnée B de V et posons $A = [\varphi]_B$. Alors $\lambda \in K$ est une valeur propre de φ (ou de A) si et seulement si la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ est non inversible, ce qui est le cas si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

Démonstration. Il suffit de noter que $[\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V]_B = A - \lambda \cdot I_n$ et de se rappeler qu'une transformation linéaire est inversible si et seulement si l'une, donc toutes, de ses représentations matricielles est également inversible. □

Ceci motive, à son tour, la définition suivante.

Définition 1.1.5. Soit $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$. Soit encore x une indéterminée. Alors $c_A(x) := \det(A - x \cdot I_n) \in K[x]$ est appelé le **polynôme caractéristique** de la matrice A .

Par la caractérisation des valeurs propres donnée par Théorème 1.1.3 et par Proposition 1.1.4, nous déduisons que $\lambda \in K$ est une valeur propre de $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique $c_A(x)$, c.-à-d. $c_A(\lambda) = 0$.

Exemple 1.1.6. Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ est une matrice triangulaire, alors

$$c_A(x) = (a_{11} - x) \cdot (a_{22} - x) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - x).$$

Par conséquent, ses valeurs propres sont précisément celles situées le long de sa diagonale.

AZ: Une matrice est dite triangulaire si elle est carrée et si tous les coefficients d'un côté ou de l'autre de la diagonale principale sont nuls.

Exemple 1.1.7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(K)$. Alors

$$c_A(x) = \det \left(\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} \right) = x^2 - (a+d) \cdot x + (ad-bc) = x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det(A)$$

Grâce au résultat suivant, on peut également définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie sur K , puis l'utiliser pour calculer des valeurs propres.

Proposition 1.1.8. *Deux matrices semblables (similaires) ont le même polynôme caractéristique. En particulier, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.*

Démonstration. Soient $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ et $P \in \text{GL}(n, K)$ telles que $B = P^{-1}AP$. On a que

$$\begin{aligned} c_B(x) &= \det(B - x \cdot I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - x \cdot I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - x \cdot P^{-1}I_nP) \\ &= \det(P^{-1}(A - x \cdot I_n)P) \\ &= \det(A - x \cdot I_n) \\ &= c_A(x) \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.9. Supposons V de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Le polynôme caractéristique de φ , noté $c_\varphi(x)$, est le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant φ par rapport à un choix de base ordonnée quelconque.

La caractérisation donnée par le Théorème 1.1.3 et par la Proposition 1.1.4 est également utile pour prouver le résultat suivant et, en particulier, pour déterminer une borne supérieure du nombre de valeurs propres distinctes qu'un opérateur peut avoir.

Proposition 1.1.10. *Toute liste de vecteurs propres d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ correspondant à des valeurs propres distinctes est linéairement indépendante.*

Démonstration. Sinon, il existe un plus petit entier positif m tel qu'il existe une liste linéairement dépendante de m vecteurs propres de φ , disons v_1, \dots, v_m , correspondant à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Mais alors, en raison de la minimalité de m , il existe des scalaires $a_1, \dots, a_m \in K$, dont aucun n'est nul, tels que

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m = 0_V.$$

Donc, en appliquant $\varphi - \lambda_m \text{id}$ aux deux membres de l'équation ci-dessus, on obtient

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m) \cdot v_1 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot v_{m-1} = 0_V.$$

Maintenant, comme m est nécessairement supérieur ou égal à deux, cette dernière égalité n'est pas vide ; et puisque les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont distinctes, aucun des coefficients ci-dessus n'est égal à 0_K . Ainsi, v_1, \dots, v_{m-1} est une liste linéairement dépendante de $m - 1$ vecteurs propres de φ correspondant à des valeurs propres distinctes. Eh bien, cela contredit la minimalité de m . \square

Pourquoi ?

Corollaire 1.1.11. *Supposons que V soit de dimension finie. Alors chaque endomorphisme linéaire de V possède au plus $\dim(V)$ valeurs propres distinctes.*

AZ: Notez que ce dernier corollaire peut bien sûr être déduit à partir du polynôme caractéristique. Quel est le degré du polynôme $c_\varphi(x)$? Quel est le nombre maximal de racines distinctes ?

AZ: Ce qui n'est peut-être pas encore clair, c'est si tout opérateur linéaire (ou toute matrice carrée) possède une valeur propre ou non. La réponse dépend fortement du corps K .

1.1.1 Pour réfléchir chez vous

AZ: Je vous propose de regarder la vidéo « À quoi servent les vecteurs et valeurs propres ? » par Lê Nguyễn Hoang dans la chaîne Wandida, EPFL.