28 octobre 2025

Corrigé 6

Exercice 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\phi(x, y, z) = (2x + y, 3x + y - z, x + y + z).$$

(a) Montrer que ϕ est linéaire.

(b) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'interpréter géométriquement. Calculer la dimension de $\ker(\phi)$.

(c) Déterminer le rang de ϕ.

(d) L'application ϕ est-elle surjective?

Solution 1.

(a)

$$\begin{aligned}
&\phi((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = \phi(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\
&(2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2,\ 3(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 - (z_1 + z_2), \\
&x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2) = (2x_1 + y_1,\ 3x_1 + y_1 - z_1, x_1 + y_1 + z_1)+ \\
&(2x_2 + y_2,\ 3x_2 + y_2 - z_2,\ x_2 + y_2 + z_2) = \phi(x_1, y_1, z_1) + \phi(x_2, y_2, z_2).
\end{aligned}$$

On montre encore plus facilement que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\phi(a(x, y, z)) = \phi(ax, ay, az) = (2ax + ay, 3ax + ay - az, ax + ay + az) \\
&= a(2x + y, 3x + y - z, x + y + z) = a\phi(x, y, z).
\end{aligned}$$

Il résulte que ϕ est linéaire.

(b) $\ker(\phi)$ est l'espace vectoriel des solutions du système d'équations homogène:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

L'addition des deux dernières équations donne $4x + 2y = 2(2x + y) = 0$, c'est-à-dire la première équation. Par conséquent, une des équations est conséquence des deux autres et on doit résoudre le système constitué de deux d'entre elles, par exemple la première et la troisième. Cela donne $y = -2x$ et $z = x$ et on a donc $\ker(\phi) = \{(x, -2x, x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. C'est une droite passant par l'origine des axes. Une base de $\ker(\phi)$ est formée d'un vecteur $(x, -2x, x)$ avec $x \neq 0$, par exemple $(1, -2, 1)$, donc $\dim(\ker(\phi)) = 1$.

(c) On a $\text{rang}(\phi) = \dim(\text{Im}(\phi)) = 3 - \dim(\ker(\phi)) = 2$.

(d) $\text{rang}(\phi) = 2 < 3$. L'application ϕ n'est donc pas surjective.

Exercice 2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes?

(a) L'application $\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z_1, z_2) = z_1 - \overline{z_2}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(b) L'application ϕ du point (a) est $\mathbb{R}$-linéaire.

(c) L'ensemble $\phi^{-1}(0)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(d) L'ensemble $\phi^{-1}(0)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(e) Si $n > m$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\ker(f) \neq \{0\}$.

(f) Si $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est une application linéaire surjective, f est aussi injective.

Solution 2.

(a) On voit facilement que ϕ préserve l'addition, car $\forall\ z_1, z_2, u_1, u_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rclcl} \phi((z_1, z_2) + (u_1, u_2)) & = & \phi(z_1 + u_1,\ z_2 + u_2) & = & z_1 + u_1 - (\overline{z_2 + u_2}) \\ & = & z_1 - \overline{z_2} + u_1 - \overline{u_2} & = & \phi(z_1, z_2) + \phi(u_1, u_2). \end{array}$$

L'application ϕ n'est toutefois pas $\mathbb{C}$-linéaire, car pour $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $z_2 \neq 0$, on a :

$$\phi(\alpha(z_1, z_2)) = \phi(\alpha z_1, \alpha z_2) = \alpha z_1 - \overline{\alpha z_2} = \alpha z_1 - \overline{\alpha} \cdot \overline{z_2} \neq \alpha(z_1 - \overline{z_2}) = \alpha\phi(z_1, z_2)\,.$$

(b) En revanche, ϕ est $\mathbb{R}$-linéaire, car si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha = \overline{\alpha}$ et on obtient $\phi(\alpha(z_1, z_2)) = \alpha\phi(z_1, z_2)$.

(c) On a $\ker(\phi) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 = \overline{z_2}\}$. Si $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ appartient à $\ker(\phi)$ et $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors $\alpha z_1 = \alpha\overline{z_2} \neq \overline{\alpha} \cdot \overline{z_2} = \overline{\alpha z_2}$, donc $\alpha(z_1, z_2) \notin \ker(\phi)$. Donc $\ker(\phi)$ n'est pas un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$.

(d) L'ensemble $\phi^{-1}(0)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, car on vient de voir que que ϕ est $\mathbb{R}$-linéaire.

(e) Tenant compte que $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^m) = m$, on peut écrire

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) \leq m + \dim(\ker(f)),$$

donc $\dim(\ker(f)) \geq n - m > 0$ et par conséquent $\ker(f) \neq \{0\}$. L'affirmation e) est donc juste.

(f) Nous savons que $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$. Par conséquent, f étant surjective, $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\operatorname{Im}(f)) = 4 - 4 = 0$, donc f est injective.

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $\varphi(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + y & y + z - 2t \\ x - y + z + t & 2x + y + 2z - t \end{pmatrix}$. On admettra que φ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.

(a) Déterminer $\ker(\varphi)$ ainsi que sa dimension. L'application φ est-elle injective?

(b) Déterminer le rang de φ. L'application φ est-elle surjective?

Solution 3.

(a) On a $\ker(\varphi) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ y+z-2t=0,\ x-y+z+t=0,\ 2x+y+2z-t=0\}$. Par substitution, on trouve successivement $x=-y$, $y=2t-z$ et $z=t$. On observe que $\varphi(-1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}((-1,1,1,1))$, qui est de dimension 1.

Comme $\ker(\varphi) \neq \{0\}$, φ n'est pas injective.

(b) Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\ker(\varphi)) + \mathrm{rang}(\varphi)$$

et donc $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3$.

Comme $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3$, et que $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est de dimension 4, φ n'est pas surjective.

Exercice 4. Soient V un K-espace vectoriel et $\varphi : V \to V$ une application K-linéaire. On suppose que $\dim(V) = 9$ et $\varphi^2 = 0$. Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq 4$. Justifiez vos raisonnements.

Solution 4. On montre d'abord que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\varphi)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Alors il existe $x \in V$ tel que $y = \varphi(x)$. Si on applique φ à y, on obtient $\varphi(y) = \varphi(\varphi(x)) = (\varphi \circ \varphi)(x) = 0$, où on a utilisé la deuxième condition dans la dernière égalité. Donc $y \in \ker(\varphi)$ pour tout $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et par conséquent $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\varphi)$.

Maintenant, par le théorème du rang, $\dim V = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\ker\varphi)$. Comme $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \ker(\varphi)$ on a que $\dim(\ker\varphi) \geq \dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$ et donc

$$9 = \dim V = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\ker\varphi) \geq 2\dim(\mathrm{Im}\,\varphi).$$

Cette dernière inégalité implique bien que $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \leq 4$.

Exercice 5. Soit $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\alpha(x,y,z,t) = (2x-y, x+y+z+t, 3y-2z+x-t).$$

(a) Déterminer la matrice de α par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.

(b) Quel est le vecteur colonne de $\alpha(0,1,0,0)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

(c) Montrer que $F = \{(-1,0,0,1),(0,4,0,1),(0,0,3,1),(0,0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(d) Déterminer le vecteur colonne de $v = (1,4,3,-1)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(e) Déterminer le vecteur colonne de v par rapport à la base F.

Solution 5.

(a) Soient $E = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $E' = (e_1,e_2,e_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$. Alors comme

$$\begin{array}{rcccl} \alpha(e_1) & = & \alpha(1,0,0,0) = (2,1,1) & = & 2\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3, \\ \alpha(e_2) & = & \alpha(0,1,0,0) = (-1,1,3) & = & (-1)\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 3\cdot e_3, \\ \alpha(e_3) & = & \alpha(0,0,1,0) = (0,1,-2) & = & 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + (-2)\cdot e_3, \\ \alpha(e_4) & = & \alpha(0,0,0,1) = (0,1,-1) & = & 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + (-1)\cdot e_3, \end{array}$$

par définition, la matrice $[\alpha]_{E,E'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On note $w = (0,1,0,0)$. Alors comme $w = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$, on a $[w]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après le cours,

$$\begin{aligned} [\alpha(w)]_{E'} &= [\alpha]_{E,E'}[w]_E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Noter bien que cette dernière égalité est cohérente avec le fait que $\alpha((0,1,0,0)) = (-1,1,3)$.

(c) Notons $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Première méthode: On voit aisément que

$$\begin{aligned} e_1 &= -f_1 + f_4 &&= (-1) \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4 \\ e_2 &= \tfrac{1}{4}(f_2 - f_4) &&= 0 \cdot f_1 + \tfrac{1}{4} \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + (-\tfrac{1}{4}) \cdot f_4 \\ e_3 &= \tfrac{1}{3}(f_3 - f_4) &&= 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \tfrac{1}{3} \cdot f_3 + (-\tfrac{1}{3}) \cdot f_4 \\ e_4 &= f_4 &&= 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4. \end{aligned}$$

Donc F engendre tout élément de la base canonique E et comme F est de cardinal 4 qui est la dimension de $\mathbb{R}^4$, F est une base de $\mathbb{R}^4$. De plus, on obtient

$$[\mathrm{id}\,]_{E,F} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode: On peut montrer aisément que F est libre, donc elle est une base de $\mathbb{R}^4$, puisqu'elle est de cardinal 4 qui est la dimension de $\mathbb{R}^4$.

(d) Comme $v = (1,4,3,-1) = 1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 + (-1) \cdot e_4$, on a $[v]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(e) D'après le cours,

$$\begin{aligned} [v]_F &= [\mathrm{id}\,]_{E,F} \cdot [v]_E \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Posons $H = \{\theta \in \mathrm{GL}(V) \mid \theta(W) \subseteq W\}$ (on l'appelle *le stabilisateur de W dans V*. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$. (On rappelle que la loi de composition dans le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est la composition d'applications.)

Solution 6. On note que $H \neq \emptyset$ car $\mathrm{id}_V \in H$. Soient maintenant $\theta_1, \theta_2 \in H$ et soit $w \in W$. Alors $(\theta_1 \circ \theta_2) = \theta_1(\theta_2(w))$. Comme $\theta_2 \in H$, $\theta_2(w) \in W$ et comme $\theta_1 \in H$, $\theta_1(\theta_2(w)) \in W$ et on déduit que $\theta_1 \circ \theta_2 \in H$.

Soit $\theta \in H$. Comme W est de dimension finie et θ est bijective (donc injective), on a par le théorème du rang (appliqué à l'application $\theta : W \to W$) que $\dim W = \dim \theta(W)$ et donc $\theta(W) = W$. Maintenant, pour $w \in W$, il existe $u \in W$ avec $\theta(u) = w$. On trouve que $\theta^{-1}(w) = \theta^{-1}(\theta(u)) = u \in W$, ce qui montre que $\theta^{-1}(W) \subset W$ et $\theta^{-1} \in H$ aussi.

Ces deux vérifications montrent que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

Exercice 7. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$\phi(x, y, z) = (3x - y + 2z,\ x + 3y - z,\ x - 3y + 5z,\ 2x - y)$$

et soit $\psi : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $\psi(f(t)) = (f(0), 0, f(2))$.

(a) Déterminer la matrice de ψ par rapport à la base $T = (1, t, t^2)$ de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ainsi que la matrice de ϕ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

(b) A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice de $\phi \circ \psi$ par rapport aux bases données de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et $\mathbb{R}^4$.

(c) A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer le vecteur colonne de $\psi(t^2 - 3t + 4)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(d) A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer le vecteur colonne de $\phi(\psi(t^2 - 3t + 4))$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Solution 7.

(a) Soit $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $F = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On calcule $\psi(1) = (1, 0, 1)$, $\psi(t) = (0, 0, 2)$ et $\psi(t^2) = (0, 0, 4)$, ce qui donne la matrice

$$[\psi]_{T,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\phi(e_1) = \phi(1, 0, 0) = (3, 1, 1, 2)$, $\phi(e_2) = \phi(0, 1, 0) = (-1, 3 - 3, -1)$, et $\phi(e_3) = \phi(0, 0, 1) = (2, -1, 5, 0)$, ce qui donne la matrice

$$[\phi]_{E,F} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice de $\phi \circ \psi$ par rapport aux bases choisies est le produit des matrices de ψ et de ϕ. On obtient donc

$$[\phi \circ \psi]_{T,F} = [\phi]_{E,F} \cdot [\psi]_{T,E} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 10 & 20 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Posons $v = t^2 - 3t + 4 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Le vecteur colonne de v par rapport à la base T est $[v]_T = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient l'image de v par ψ en faisant le produit matriciel

$$\big[\, \psi(v) \,\big]_E = [\psi]_{T,E} \cdot [v]_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(d) On obtient l'image de v par $\phi \circ \psi$ en utilisant (b) et en faisant le produit matriciel

$$\big[\, (\phi \circ \psi)(v) \,\big]_F = [\phi \circ \psi]_{T,F} \cdot [v]_T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 10 & 20 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Une autre méthode consiste à calculer l'image de $\psi(v)$ par ϕ, en utilisant (a) et (c), ce qui donne le produit matriciel

$$\big[\, \phi(\psi(v)) \,\big]_F = [\phi]_{E,F} \cdot \big[\, \psi(v) \,\big]_E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $\beta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par

$$\beta(z_1, z_2) = (1-i)z_2 + iz_1 t + (z_1 - z_2)t^2.$$

Soit E la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et E' la base $(1, t, t^2)$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$. Soient $F = ((1,i),(2,i))$, $G = (t, 1 + it + t^2, -t - it^2)$.

(a) Montrer que F est une base de $\mathbb{C}^2$ et que G est une base de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$.

(b) Déterminer $[\mathrm{id}\,]_{F,E}$, $[\mathrm{id}\,]_{G,E'}$ et $[\beta]_{E,E'}$.

(c) Déterminer $[\mathrm{id}\,]_{E',G}$.

(d) Déterminer $[\beta]_{F,G}$.

Solution 8.

(a) On note $F = (f_1, f_2) = ((1,i),(2,i))$ et $G = (g_1, g_2, g_3) = (t, 1+it+t^2, -t-it^2)$.

Comme $\left\{\begin{array}{lllll} f_1 & = & (1,i) & = & e_1 + ie_2, \\ f_2 & = & (2,i) & = & 2e_1 + ie_2, \end{array}\right.$ on a $[\mathrm{id}\,]_{F,E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & i \end{pmatrix}$. Observons que $f_2 - f_1 = e_1$ et puis on obtient que $e_2 = -2if_1 + if_2$. C'est-à-dire que F engendre tout élément de E et donc F est génératrice. Comme elle est de cardinal 2, qui est la dimension de $\mathbb{C}^2$, F est une base de $\mathbb{C}^2$.

Comme $\left\{\begin{array}{lll} g_1 & = & t \\ g_2 & = & 1+it+t^2 \\ g_3 & = & -t-it^2 \end{array}\right.$ on a $[\mathrm{id}\,]_{G,E'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$. Un argument similaire à celui utilisé dans le paragraphe précédent donne $\left\{\begin{array}{lll} 1 & = & -2ig_1 + g_2 - ig_3, \\ t & = & g_1 \\ t^2 & = & ig_1 + ig_3. \end{array}\right.$ C'est-à-dire que G engendre tout élément de E' et donc G est génératrice. Comme elle est de cardinal 3, qui est la dimension de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$, G est une base de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$. (Alternativement, on peut aussi montrer que G est une famille libre en résolvant un système d'équations linéaires.)

Observons que l'on a exprimé les vecteurs de E' en fonction de $G = (g_1, g_2, g_3)$, donc on a obtenu la matrice $[\mathrm{id}\,]_{E',G} = \begin{pmatrix} -2i & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}$.

(b) On a obtenu $[\mathrm{id}\,]_{F,E}$ et $[\mathrm{id}\,]_{G,E'}$ dans a).

Comme $\left\{\begin{array}{lll} \beta(e_1) & = & it + t^2, \\ \beta(e_2) & = & (1-i) - t^2, \end{array}\right.$ on a $[\beta]_{E,E'} = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) On a obtenu $[\mathrm{id}\,]_{E',G}$ dans a).

(d) D'après le cours, on obtient

$$\begin{aligned} [\beta]_{F,G} &= [\mathrm{id}\,]_{E',G} \cdot [\beta]_{E,E'} \cdot [\mathrm{id}\,]_{F,E} \\ &= \begin{pmatrix} -2i & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2i & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ i & 2i \\ 1-i & 2-i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3+2i \\ 1+i & 1+i \\ 2 & 2+i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$.

(a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) On considère l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\phi : \mathbb{C}[t]_{\leq 1} \to \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$ définie par $\phi(f) = \begin{pmatrix} f(i) \\ f(0) \end{pmatrix}$. On pose les bases ordonnées suivantes des deux espaces vectoriels :
$B_1 = (1, t)$, $B_2 = (t - i, i)$, des bases de $\mathbb{C}[t]_{\leq 1}$ et
$C_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et $C_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right)$, des bases de $\mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$.
Trouver les matrices de passage suivantes :
$[\mathrm{id}]_{B_1,B_2}$, $[\mathrm{id}]_{B_2,B_1}$, $[\mathrm{id}]_{C_1,C_2}$, $[\mathrm{id}]_{C_2,C_1}$.

(c) Trouver les matrices de ϕ par rapport aux differents choix des bases, comme suit :
$[\phi]_{B_1,C_1}$, $[\phi]_{B_1,C_2}$, et $[\phi]_{B_2,C_2}$.

Solution 9.

(a) On vérifie que $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et le produit également dans l'autre sens.

(b) On exprime chaque élément de la base B_2 en termes de la base B_1 : $t-i = -i\cdot 1+1\cdot t$ et $i = i\cdot 1+0\cdot t$ et on trouve ainsi que $[\mathrm{id}]_{B_2,B_1} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, on trouve $[\mathrm{id}]_{B_1,B_2} = ([\mathrm{id}]_{B_2,B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, où la dernière égalité vient de la formule de la partie (a).
On fait de même pour trouver $[\mathrm{id}]_{C_1,C_2}$ et $[\mathrm{id}]_{C_2,C_1}$:
$[\mathrm{id}]_{C_2,C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ et $[\mathrm{id}]_{C_1,C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

(c) on calcule $\phi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\phi(t) = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi nous avons $[\phi]_{B_1,C_1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite on utilise les résultats du cours :

$$[\phi]_{B_1,C_2} = [\mathrm{id}]_{C_1,C_2} \cdot [\phi]_{B_1,C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$[\phi]_{B_2,C_2} = [\mathrm{id}]_{C_1,C_2} \cdot [\phi]_{B_1,C_1} \cdot [\mathrm{id}]_{B_2,B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$