EPFL Automne 2025
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 9

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

Exercice 1. Soient V, W deux espaces vectoriels et $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire. Montrer que

1. Si φ est injective alors l'image par φ d'une famille finie libre est libre et que si V est de dimension finie on a
$$\dim V \leqslant \dim W.$$
2. Si φ est surjective alors l'image par φ d'une famille generatrice de V est generatrice de W ; en deduire que si V est de dimension finie alors W egalement et
$$\dim(V) \geqslant \dim(W).$$
3. Que pouvez vous dire de φ si (V et W de dimensions finies).
   — L'image par φ d' une base de V est une famille libre de W ?
   — L'image par φ d'une base de V est une famille generatrice de W ?
   — L'image par φ d'une base de V est une base de W ?

Exercice 2. Soit $d \geqslant 0$ un entier et
$$\mathbb{R}[x]_{\leqslant d} = \{a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1.x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}\},$$
l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degree $\leqslant d$.

1. Montrer que les fonctions monomes de degres $\leqslant d$, $\{1, x, \cdots, x^d\}$ forme une base de $\mathbb{R}[x]_{\leqslant d}$: on considerera une combinaison lineaire nulle de ces monomes et on regardera sa limite quand $x \to \infty$. En deduire la dimension de cet espace.

2. Soit $\{P_i(x),\ i = 0, \cdots, d\}$ une famille de $d+1$ polynomes tels que $\deg P_i = i$. Montrer que $\{P_i(x),\ i = 0, \cdots, d\}$ forme une base de $\mathbb{R}[x]_{\leqslant d}$ en considerant des limites quand $x \to \infty$.
3. Soient $x_0, \cdots, x_d \in \mathbb{R}$, $d+1$ nombres reels distincts et pour $i = 0, \cdots, d$ soit

$$Q_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

   (par exemple $Q_1(x) = (x - x_0).(x - x_2).(x - x_3). \cdots .(x - x_d))$. Montrer que $\{Q_i,\ d = 0, \cdots, d\}$ forme une base de $\mathbb{R}[x]_{\leqslant d}$. On pourra evaluer une combinaison lineaire nulle de ces polynomes en des points bien choisis.
4. On prend $d = 3,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_2 = 3$. Ecrire le polynome $x^3 + x^2 + x + 1$ comme combinaison lineaire des Q_i. On pourra encore evaluer ce polynome en des points bien choisis.
5. On va retrouver le resultat (obtenu en general par division euclidienne) disant qu'un polynome non-nul $P(X)$ de degree $\leqslant d$ admet au plus d racines distinctes dans $\mathbb{R}$ (une racine est un reel x tel que $P(x) = 0$).

   On se donne donc un polynome $P(X)$ qui possede au moins $d+1$ racines distinctes $x_0 < \cdots < x_d$. En ecrivant $P(X)$ dans la base $\{Q_i(X),\ i = 0, \cdots, d\}$ et en evaluant montrer que P est nul.

Autour du Thm Noyau-Image

Exercice 3. Soit K un corps. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application lineaire definie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, x + y) \end{array}$$

(ici on notera $2, 3, \cdots$ pour $2_K = 2.1_K,\ 3_k = 3.1_K, \cdots$)

1. Montrer avec un minimum de calculs que $\ker(\varphi) = \{0_2\}$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = K^2$.

Exercice 4. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application lineaire definie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x + 3y, x + 4y) \end{array}$$

(ici on notera $2, 3, \cdots$ pour $2_K = 2.1_K,\ 3_k = 3.1_K, \cdots$)

1. Trouver avec un minimum de calculs les dimensions de $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ (en fonction de la caracteristique de K).
2. Donner (encore avec le minimum de calculs) une base du noyau et de l'image de φ.

Exercice 5. Soit K un corps de caracteristique 0, $V = K^5$ et

$$W = \{(a, b, c, d, e) \in V,\ a + b = c + d,\ a + 2c = 0, 2c + b + 4d = 0\}.$$

1. Montrer que W est un SEV de K^5 en montrant que W est le noyau d'une application lineaire convenable.
2. Calculer $\dim W$ (eventuellement en utilisant le Thm Noyau-Image).
3. Donner une base de W (il suffit d'exhiber une famille libre de cardinal convenable : pourquoi ?).

Exercice 6. ($\star$) Soient $X, Y \subset V$ des SEVs d'un EV de dimension finie et $X+Y \subset V$ leur somme (qui est un SEV de V). On rappelle que X et Y sont en somme directe si $X \cap Y = \{0_V\}$ et on ecrit cela $X \oplus Y$; dans cet exercice on considere le cas ou X et Y ne sont pas forcement en somme directe.

1. Montrer que

$$\dim X + \dim Y = \dim(X + Y) + \dim(X \cap Y).$$

   On pourra appliquer le Thm Noyau-Image a l'application lineaire

$$\bullet + \bullet : \begin{array}{ccc} X \times Y & \mapsto & V \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}.$$

2. On suppose que $\dim X + \dim Y = \dim V$. Montrer que les proprietes suivantes sont equivalentes
   (a) $X \cap Y = \{0_V\}$,
   (b) $X + Y = V$,
   (c) $X \oplus Y = V$.

Exercice 7. Soit V un K-EV de dimension d. Un endomorphisme $\pi : V \mapsto V$ est appele projecteur si π verifie (dans $\mathrm{End}(V)$)

$$\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi.$$

1. Montrer que si π est un projecteur $\ker \pi \cap \mathrm{Im}\, \pi = \{0_V\}$.
2. Montrer (sans calcul mais en utilisant les resultats d'autres exercices) que $V = \ker \pi \oplus \mathrm{Im}\, \pi$.
3. Soit $v \in V$. Que vaut $\pi(v - \pi(v))$? En deduire une decomposition explicite d'un vecteur $v \in V$ sous la forme

$$v = v_0 + v_1 \text{ avec } v_0 \in \ker \pi,\ v_1 \in \mathrm{Im}\, \pi.$$

4. Montrer que
$$\operatorname{Im}\pi = \ker(\mathrm{Id}_V - \pi).$$
5. Soit $\psi \in \operatorname{End}(V)$ une application lineaire qui commute avec π ($\pi \circ \psi = \psi \circ \pi$). Montrer que
$$\psi(\ker\pi) \subset \ker(\pi),\ \psi(\operatorname{Im}\pi) \subset \operatorname{Im}(\pi).$$
Ainsi les restrictions $\psi_{|\ker\pi}$ et et $\psi_{|\operatorname{Im}\pi}$ definissent des elements de $\operatorname{End}(\ker\pi)$ et de $\operatorname{End}(\operatorname{Im}\pi)$.
6. Soit
$$\operatorname{Com}(\pi) = \{\psi \in \operatorname{End}(V),\ \psi \circ \pi = \pi \circ \psi\} \subset \operatorname{End}(V)$$
l'ensemble des endomorphismes de V qui commutent avec π.
Montrer que $\operatorname{Com}(\pi)$ est un sev et un sous-anneau de $\operatorname{End}(V)$ (ie. une sous-K-algebre) et que l'application
$$\psi \in \operatorname{Com}(\pi) \to (\psi_{|\ker\pi}, \psi_{|\operatorname{Im}\pi}) \in \operatorname{End}(\ker\pi) \times \operatorname{End}(\operatorname{Im}\pi)$$
est un isomorphisme de K-evs.
En deduire $\dim(\operatorname{Com}(\pi))$ en fonction de d et du rang $r = \dim(\operatorname{Im}\pi)$.

Dualite

Exercice 8 (bi-dual)**.** Soit V un K-EV de dimension finie d, $V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$ son dual et
$$V^{**} = (V^*)^* = \operatorname{Hom}_K(V^*, K)$$
le bi-dual de V (le dual du dual V^* de V).

1. Montrer (sans calculs) que V et V^{**} sont isomorphes. On va donner une isomorphisme explicite et canonique.
2. Pour $v \in V$, on considere l'application "evaluation au vecteur v" qui a une forme lineaire $\ell : V \mapsto K$ associe sa valeur au vecteur v :
$$\mathrm{eval}_v : \ell \mapsto \mathrm{eval}_v(\ell) := \ell(v) \in K.$$
Montrer que eval_v est lineaire (sur V^*) et definit donc un element de V^{**}.
3. On considere alors l'application :
$$\mathrm{eval}_\bullet : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & V^{**} \\ v & \mapsto & \mathrm{eval}_v \end{array}.$$
Montrer que $\mathrm{eval}_\bullet$ est lineaire et injective. En deduire que c'est un isomorphisme de V vers V^{**}.

4. Soit $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ une base de V, $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_i^*,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ la base duale et
$$\mathscr{B}^{**} = \{\mathbf{e}_i^{**},\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$$
de la base duale de $\mathscr{B}^*$ (la bi-duale) : c'est a dire l'unique famille de forme lineaires sur V^* verifiant
$$\mathbf{e}_i^{**}(\mathbf{e}_j^*) = \delta_{ij}.$$
Montrer que l'image de $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ par l'isomorphisme $\mathrm{eval}_\bullet$ est precisement la biduale $\mathscr{B}^{**}$.

Exercice 9. Soit V, W des K-evs de dimension finie d, d' et $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$, $W^* = \mathrm{Hom}_K(W, K)$ les espaces duaux.

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, on note $\varphi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ l'application duale definie pour $l' \in W^*$ par
$$\varphi^*(l') = l' \circ \varphi \in V^*$$
c'est a dire pour tout $v \in V$
$$\varphi^*(l')(v) = l'(\varphi(v)).$$
Montrer que

1. l'application
$$\bullet^* : \varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$$
est une application lineaire et un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ et $\mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$.
2. Soit U un K-EV et $\psi : U \to V$ une application lineaire. Montrer que
$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*.$$
3. Montrer que si φ is un isomorphisme alors φ^* egalement et que $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

Encore un corps (pour les aficionad.a.o.s)

Exercice 10. Pour $p = 2$, tout element de $\mathbb{F}_2$ est un carre, et l'exercice 9 de la serie precedente ne permet donc pas de construire de corps fini a 4 elements. Voici une variante.

1. Pour $K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le corps a deux elements, reprendre l'exercice 8 de la serie 8 avec la matrice
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_2)$$
et montrer que $\mathbb{F}_2[I]$ un anneau commutatif.
2. En utilisant le fait (le montrer) que l'equation $u^2 + u = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{F}_2$ montrer que $\mathbb{F}_2[I]$ est un corps de cardinal 4. On le note $\mathbb{F}_4$.