EPFL Automne 2025
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 8

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

Si A est un anneau et $n \in \mathbb{Z}$, on notera n_A l'image de n par le morphisme canonique (eg. $2_A = 1_A + 1_A,\ (-1)_A = -1_A$). On se souviendra que si $\ker(\mathrm{Can}_A) = q\mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ alors pour tout n multiple de q, $n_A = 0_A$.

Dans la suite A designera toujours un anneau commutatif.

Des Modules

Exercice 1. Soit $(M, +)$ un groupe commutatif ; on a vu qu'on peut definir pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in M$ l'element de M le produit externe

$$n.m := \begin{cases} m + \cdots + m \ (n \text{ fois}) & \text{si } n \geqslant 0 \\ (-m) + \cdots + (-m) \ (|n| \text{ fois}) & \text{si } n < 0. \end{cases}.$$

1. Montrez que l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times M & \mapsto & M \\ (n, m) & \mapsto & n.m \end{array}$$
fait de M un $\mathbb{Z}$-module.
2. Soit A un anneau commutatif ; on suppose que M est egalement un A-module. Montrer que pour tout $m \in M$, on a
$$-m = (-1_A) * m,\ 0_A * m = 0_M.$$
3. Plus generalement, montrer que les structures de $\mathbb{Z}$-module et de A-module sur M sont compatibles dans le sens suivant.

Etant donne $n \in \mathbb{Z}$, montrer que pour tout $m \in M$ on a

$$n.m = n_A * m.$$

4. Soit M un $\mathbb{Z}$-module (notons $*$ la multiplication externe). Montrer que cette structure de $\mathbb{Z}$-module coincide avec celle de la premiere question.

   Autrement dit $\mathbb{Z}$-module et groupe commutatif sont des *notions equivalentes.*

Exercice 2. Soit

$$A^d = \{(a_1, \cdots, a_d),\ a_i \in A\}$$

le module libre de rang d sur un anneau commutatif non-nul. On a vu que la famille (base canonique)

$$\mathscr{B}^0 = \{\mathbf{e}_i,\ i = 1, \cdots, d\}$$

ou $\mathbf{e}_i$ est le d-uplet dont toutes les coordonnees sont nulles sauf la i-ieme qui vaut 1_A, ie.

$$\mathbf{e}_1 = (1_A, 0_A, \cdots, 0_A),\ \mathbf{e}_2 = (0_A, 1_2, \cdots, 0_A), \cdots$$

est generatrice.

1. Montrer que pour $b_1, \cdots, b_d \in A^\times$ des elements inversibles de A, la famille

   $$\mathscr{B}'^0 = \{\mathbf{e}'_i,\ i = 1, \cdots, d\}$$

   est generatrice ; ici $\mathbf{e}'_i \in A^d$ est le d-uplet dont toutes les coordonnees sont nulles sauf la i-ieme qui vaut b_i, ie.

   $$\mathbf{e}'_1 = (b_1, 0_A, \cdots, 0_A),\ \mathbf{e}'_2 = (0_A, b_2, \cdots, 0_A), \cdots .$$

Des SEVs

Exercice 3. Soit K un corps. Les sous-ensembles suivants sont-ils des SEVs ? on pourra eventuellement discuter suivant la nature du corps K (caracteristique du corps ou autre propriete) ?

1. $U(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 2.y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
2. $U(\mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ x^2 - 2.y^2 = 0\} \subset \mathbb{Q}^2$ (ou se trouve $\sqrt{2}$?).
3. $U(K) = \{(x, y) \in K^2,\ x^2 - 2.y^2 = 0\} \subset K_2^2$ si $\mathrm{car}(K) = 2$.
4. $\{(x_1, \cdots, x_d) \in K^d,\ x_1 + \cdots + x_d = 0_K\} \subset K^d$.
5. $\{(x_1, \cdots, x_d) \in K^d,\ x_1 + \cdots + x_d = 6_K\} \subset K^d$.
6. $\{(x_1, \cdots, x_d) \in K^d,\ x_1 + \cdots + x_d = 1_K\} \subset K^d$.

7. Soit V un K-EV, X un ensemble et

$$\mathcal{F}(X,V) = \{f : X \mapsto V\}$$

l'EV des fonctions de X a valeurs dans V. Soit $I \subset X$ un sous-ensemble,

$$\mathcal{F}(X,V)_I = \{f : X \mapsto V, \forall x \in I,\ f(x) = 0_V\} \subset \mathcal{F}(X,V)$$

le sous-ensemble des fonctions s'annulant en tout point de I.

Exercice 4. Soit K un corps, $\mathcal{F}(K,K)$ l'espace vectoriel des fonctions de K a valeurs dans K et $\mathcal{F}(K,K)^+$ le sous-ensemble des fonctions paires (resp. $\mathcal{F}(K,K)^-$ des fonctions impaires) :

$$f : K \mapsto K,\ \forall x \in K,\ f(x) = f(-x)\ (resp.\ f(x) = -f(-x)).$$

1. Montrer que si $\mathcal{F}(K,K)^{\pm}$ sont des SEVs de $\mathcal{F}(K,K)$
2. Montrer que $\mathrm{car}(K) \neq 2$ on a une decomposition en somme directe

$$\mathcal{F}(K,K) = \mathcal{F}(K,K)^+ \oplus \mathcal{F}(K,K)^-.$$

3. Que ce passe-t-il si $\mathrm{car}(K) = 2$?

Exercice 5. Dans l'EV, K^3 on considere la famille

$$\mathscr{F} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

1. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $\mathscr{F}$ est generatrice de K^3 : tout element $(x,y,z) \in K^3$ est combinaison lineaire de ces trois vecteurs.
2. Montrer que si $\mathrm{car}(K) = 2$ la famille $\mathscr{F}$ n'est pas generatrice en trouvant un ou des vecteurs qui ne sont pas CL de ces trois vecteurs.

Exercice 6 ($\star$). Soit K un corps general, on notera 2 pour $2_K = 2.1_K$. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application definie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x+2y) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est lineaire.
2. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 3$ alors $\ker(\varphi) = \{0_2\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = K^2$.
3. Si $\mathrm{car}(K) = 3$ montrer que le noyau et l'image sont de dimension 1 en donnant dans chaque cas un vecteur generateur (on observera que dans ce cas $2_K = -1_K$).

Encore des corps !

Quand on a deux corps $K \subset L$ emboites l'un dans l'autre on dit que L est une *extension* de K.

Dans ces exercices on va etudier (un peu) les extensions de corps notamment en lien avec la structure d'espace vectoriel.

Exercice 7.

1. Soit $K \subset L$ une extension de corps. Montrer que L a une structure naturelle de K-EV.
2. Pour l'extension $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}$-EV).
3. Soit K un corps fini. Montrer que $|K| = p^d$ ou p est un nombre premier et d est un entier (ainsi il n'existe pas de corps fini de cardinal 22). Par contre on peut montrer que pour tout premier p et entier $d \geqslant 1$ il existe un corps fini de cardinal p^d (on peut montrer que ce corps est unique a isomorphisme pres et on le note $\mathbb{F}_{p^d}$).

Exercice 8. Soit K un corps, $M_2(K)$ l a K-algebre des matrices 2×2,

$$K.\mathrm{Id}_2 = \{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in K\}$$

le corps (isomorphe a K) des matrices scalaires, $I_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$K[I_\Delta] = K.\mathrm{Id}_2 + K.I_\Delta = \{\begin{pmatrix} x & y\Delta \\ y & y \end{pmatrix},\ x, y \in K\}.$$

On sait que $K[I_\Delta]$ est un anneau commutatif, un K-EV (le SEV de engendre par Id_2 et I_Δ) et un corps ssi Δ n'est pas un carre.

1. Quelles la dimension de $K[I_\Delta]$ comme K-EV ?
2. On considere le cas ou $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p un nombre premier. Exhiber pour $p = 3$ ou 5 une classe de congruence modulo p qui n'est pas un carre modulo p et en deduire l'existence de corps de cardinal 9 et 25.
3. Soit $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps fini a p elements (p est premier). Montrer que le nombre de carres dans $\mathbb{F}_p$ vaut $\frac{p+1}{2}$.
   Pour cela on pourra montrer que pour tout carre $x^2 \in \mathbb{F}_p$ on a
   $$z^2 = x^2 \iff z \in \{\pm x\}.$$
4. En deduire que pour tout $p > 2$, il existe un corps de cardinal p^2.

Remarque. On verra la prochaine fois comment construire un corps a 4 elements.