

## Série 5

---

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ( $\star$ ) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le vendredi de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

### Groupes engendres

**Exercice 1.** ( $\star$ ) Soit le groupe produit  $(\mathbb{Z}^2, +)$  forme des paires d'entiers et equipe de l'addition provenant de  $(\mathbb{Z}, +)$  :

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y), x, y \in \mathbb{Z}\}$$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

(comme la notation le suggere on utilisera -sauf pour la deuxieme question - la notation additive/multiple : en particulier on notera pour  $n \geq 1$  un entier

$$n.(x, y) = (x, y) + (x, y) + \cdots + (x, y) \text{ (} n \text{ fois);}$$

on a evidemment  $n.(x, y) = (nx, ny)$

1. Montrer que le groupe  $\mathbb{Z}^2$  est engendre par les elements  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  :

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{Z}^2.$$

2. Soit  $(H, \star)$  un autre groupe (note multiplicativement),  $\varphi : \mathbb{Z}^2 \mapsto H$  un morphisme de groupes et

$$h_1 = \varphi((1, 0)), h_2 = \varphi((0, 1)).$$

Montrer que pour tout  $x, y \in \mathbb{Z}$  on a

$$\varphi((x, y)) = h_1^x \star h_2^y = h_2^y \star h_1^x.$$

3. Soient  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$  deux paires d'entiers. On pose

$$(a, b) \wedge (c, d) := ad - bc.$$

Montrer que si  $(a, b) \wedge (c, d) = \pm 1$  alors ces deux elements engendrent  $\mathbb{Z}^2$  :

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = \mathbb{Z}^2.$$

On pourra commencer par remarquer que

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = \{m.(a, b) + n.(c, d), m, n \in \mathbb{Z}\} =: \mathbb{Z}.(a, b) + \mathbb{Z}(c, d),$$

et montrer que

$$(1, 0), (0, 1) \in \langle \{(a, b), (c, d)\} \rangle$$

en resolvant des equations lineaires.

4. Montrer que si  $\Delta = ad - bc \neq \pm 1$  alors

$$H := \langle (a, b), (c, d) \rangle \neq \mathbb{Z}^2.$$

Pour cela on pourra comparer les images dans  $\mathbb{Z}$  des produits  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$  et  $H \times H$  par l'application

$$\bullet \wedge \bullet : ((u, v), (u', v')) \mapsto (u, v) \wedge (u', v') = uv' - u'v.$$

**Exercice 2** (Groupe des commutateurs/Groupe derive ). Soit  $(G, \cdot)$  un groupe. Le commutateur de deux elements  $g, h \in G$  est l'element

$$[g, h] = g.h.g^{-1}.h^{-1}.$$

Le groupe *derive* de  $G$  ou groupe des commutateurs de  $G$  est par definition le sous-groupe engendre par les commutateurs

$$D(G) = [G, G] := \langle \{[g, h], g, h \in G\} \rangle.$$

1. Que vaut  $D(G)$  si  $G$  est commutatif ?
2. Montrer que pour tout  $k \in G$ , et  $g, h \in G$ ,

$$\text{Ad}_k([g, h]) = [\text{Ad}_k(g), \text{Ad}_k(h)]$$

3. En deduire que  $D(G)$  est distingue dans  $G$ .
4. Soit  $Z$  un groupe commutatif et

$$\varphi : G \mapsto Z$$

un morphisme de groupes. Montrer que  $\varphi|_{D(G)}$  (le morphisme  $\varphi$  restreint au sous-groupe  $D(G)$ ) est le morphisme trivial :

$$\forall c \in D(G), \varphi(c) = e_Z$$

(on commencera par calculer la valeur de  $\varphi$  sur un commutateur).

## Morphismes

**Exercice 3.** Soit  $(G, \cdot)$  un groupe,  $A \subset G$  un sous-ensemble qui engendre  $G$  :

$$\langle A \rangle = G.$$

Soient  $\varphi, \psi : G \rightarrow H$  deux morphismes de groupes.

1. Montrer que si

$$\forall a \in A, \varphi(a) = \psi(a)$$

alors

$$\varphi = \psi.$$

ie. un morphisme de groupe est complètement déterminé par ses valeurs sur les éléments d'un ensemble générateur de  $G$ .

**Exercice 4.** (Equations dans les groupes). Soit  $(G, \star)$ ,  $(H, \cdot)$  des groupes et

$$\varphi : G \mapsto H$$

un morphisme et  $\ker(\varphi)$  son noyau. Étant donné  $h \in H$ , on cherche à résoudre l'équation d'inconnue  $g \in G$  :

$$Eq(\varphi, h) : \quad \varphi(g) = h.$$

L'ensemble des solutions de cette équation n'est autre que la préimage  $\varphi^{(-1)}(\{h\}) \dots$

1. Montrer que

$$\varphi^{(-1)}(\{h\})$$

est ou bien vide ou bien non vide ; dans ce dernier cas montrer qu'il existe  $g_0 \in G$  tel que

$$\varphi^{(-1)}(\{h\}) = g_0 \star \ker(\varphi)$$

ou on a note

$$g_0 \star \ker(\varphi) = \{g_0 \star k, k \in \ker(\varphi)\}.$$

2. Montrer qu'on a également

$$\varphi^{(-1)}(\{h\}) = \ker(\varphi) \star g_0$$

avec

$$\ker(\varphi) \star g_0 = \{k \star g_0, k \in \ker(\varphi)\}.$$

Quel est l'ensemble de tous les  $g_0 \in G$  ayant les propriétés

$$\varphi^{(-1)}(\{h\}) = g_0 \star \ker(\varphi) = \varphi^{(-1)}(\{h\}) = \ker(\varphi) \star g_0 ?$$

Cela vous rappelle-t-il quelque chose dans la résolution des systèmes linéaires ? (pensez à "équation avec" et "sans second membre", "solution particulière", "solution générale" ...)

## Action de groupes

Soit  $X$  un ensemble,  $G$  un groupe et soit  $G \curvearrowright X$  une action à gauche de  $G$  sur  $X$ . On représentera (comme on préfère) cette action, soit sous la forme d'un morphisme

$$\varphi : G \mapsto \text{Bij}(X),$$

soit sous la forme d'une loi de composition externe

$$\odot : (g, x) \in G \times X \mapsto g \odot x \in X$$

vérifiant les propriétés convenables.

**Exercice 5.** Dans le cours on a énoncé le

**Théorème.** *Tout groupe  $G$  est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique  $\text{Bij}(X)$  pour un ensemble  $X$  convenable.*

1. En considérant l'action  $G \curvearrowright_{\bullet} G$  par translation à gauche, démontrer ce théorème.

**Exercice 6.** Soit  $x \in X$ , la  $G$ -orbite de  $x$  est le sous-ensemble des transformées de  $x$  par les éléments de  $G$  :

$$G \odot x = \{g \odot x, g \in G\} \subset X.$$

On note

$$G \backslash X = \{G \odot x, x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

l'ensemble des  $G$ -orbites.

On dit que  $x'$  est dans la  $G$ -orbite de  $x$  ssi

$$\text{il existe } g \in G, \text{ tel que } x' = g \odot x (= \varphi(g)(x))$$

ou en d'autres termes ssi

$$x' \in G \odot x (= \varphi(G)(x)).$$

On note cette relation

$$x' \sim_G x.$$

1. Montrer que la relation  $x' \sim_G x$  est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive) et que les classes d'équivalence de cette relation sont les  $G$ -orbites de  $X$ . Ainsi la relation  $x' \sim_G x$  peut se dire simplement "  $x$  et  $x'$  sont dans la même  $G$ -orbite".

2. En deduire que les  $G$ -orbites sont disjointes, ie.

$$\mathcal{O} \neq \mathcal{O}' \iff \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \emptyset.$$

et que l'ensemble des  $G$ -orbites forme une *partition* de  $X$  : ie.

$$X = \bigsqcup_{\mathcal{O} \in G \backslash X} \mathcal{O}.$$

En particulier si  $X$  est fini

$$|X| = \sum_{\mathcal{O}} |\mathcal{O}|.$$

3. Soit  $x \in X$ , montrer que

$$G_x = \{g \in G, g \odot x = x\} \subset G$$

est un sous-groupe de  $G$  (appele le stabilisateur de  $x$  sous l'action de  $G$ )

4. Montrer que si  $x, x'$  sont dans la meme  $G$ -orbite alors il existe  $g \in G$  tel que

$$G_{x'} = g.G_x.g^{-1} = \text{Ad}_g(G_x)$$

(on verifera que  $g$  tel que  $x' = g \odot x$  convient).

**Remarque.** En particulier le stabilisateur de  $x'$ ,  $G_{x'} = \text{Ad}_g(G_x)$  est isomorphe a  $G_x$  et donc  $G_x$  et  $G_{x'}$  ont meme cardinal.

5. Montrer que si  $G$  est commutatif les stabilisateurs  $G_{x'}$  des elements d'une meme orbite  $G \odot x$  sont tous egaux.

**Exercice 7.** On considere le cas particulier ou  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,

$$G = \langle \sigma \rangle = \sigma^{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{S}_7$$

pour  $\sigma$  la permutation donnee par

$$\sigma : 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 7, 3 \rightarrow 5, 4 \rightarrow 6, 5 \rightarrow 1, 6 \rightarrow 4, 7 \rightarrow 2.$$

L'action sur  $X$  est la restriction a  $G$  de l'action evidente de  $\mathfrak{S}_7$ .

1. Calculer l'ordre  $n_\sigma$  de  $\sigma$  (ie le cardinal de  $\sigma^{\mathbb{Z}}$ ).
2. Trouver la decomposition de  $X$  en orbites pour cette action (on notera qu'il suffit de considerer les  $\sigma^n$  pour  $n \in [0, n_\sigma - 1]$ ) et on ecrira les differentes orbites sous la forme

$$(x_0 = \sigma^0(x_0), x_1 = \sigma(x_0), x_2 = \sigma^2(x_0), \dots).$$

3. Pour chaque orbite de cette decomposition choisir un element  $x_0$  et calculer le stabilisateur  $G_{x_0}$  (et son ordre).

**Exercice 8.** On va donner une preuve du Theoreme de Lagrange dans le langage de l'exercice 6. Soit  $G$  un groupe fini et  $H \subset G$  un sous-groupe.

On considere l'action de  $H$  sur  $G$  (vu comme un ensemble),  $H \curvearrowright_t G$ , par translations a gauche :

$$(h, g) \in H \times G \rightarrow t_h(g) = h.g.$$

(c'est la restriction a  $H$  de l'action de  $G$  sur  $G$  par translations a gauche).

1. Quelle est l'orbite de  $g \in G$  sous cette action ?
2. Montrer que toutes les orbites ont meme cardinal.
3. En deduire que  $|H|$  divise  $|G|$  et que le cardinal de l'ensemble des orbites  $H \backslash G \subset \mathcal{P}(G)$  vaut

$$|H \backslash G| = \frac{|G|}{|H|}.$$

**Exercice 9.** On dit que deux groupes  $G, H$  sont isomorphes si il existe un morphisme de groupes bijectif  $\varphi$  entre  $G$  et  $H$  :

$$\psi : G \mapsto H.$$

On note cette relation

$$G \simeq H.$$

On a vu en cours que cette relation est une relation d'equivalence (reflexive, symetrique, transitive).

On suppose  $G \simeq H$  et on note  $\text{Isom}_{Gr}(G, H)$  l'ensemble (non-vide) des isomorphismes entre  $G$  et  $H$ .

Soient  $\text{Aut}_{Gr}(G)$  et  $\text{Aut}_{Gr}(H)$  les groupes d'automorphismes de  $G$  et  $H$  (pour la composition).

1. Montrer que  $\text{Aut}_{Gr}(G)$  agit sur l'ensemble  $\text{Isom}_{Gr}(G, H)$  de la maniere suivante : a  $\psi \in \text{Isom}_{Gr}(G, H)$  et  $\varphi \in \text{Aut}_{Gr}(G)$  on associe  $\psi \circ \varphi$ . Est ce une action a gauche ou a droite ? Suivant le cas en deduire une action a droite ou a gauche.
2. Definir des actions a gauche et a droite de  $\text{Aut}_{Gr}(H)$  sur  $\text{Isom}_{Gr}(G, H)$ .
3. Soit  $\psi \in \text{Isom}_{Gr}(G, H)$  un isomorphisme. Montrer que l'ensemble des isomorphismes entre  $G$  et  $H$  verifie

$$\text{Isom}_{Gr}(G, H) = \psi \circ \text{Aut}_{Gr}(G) = \text{Aut}_{Gr}(H) \circ \psi.$$

4. Donner un isomorphisme explicite entre les groupes  $\text{Aut}_{Gr}(G)$  et  $\text{Aut}_{Gr}(H)$ .