EPFL Automne 2025
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 4

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le vendredi de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1 (Se reporter a la Section 2.2.1 du cours)**.** Soit $n \geqslant 1$ un entier non-nul et

$$\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, 2, \cdots, n\})$$

le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ (ou groupe des permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$). C'est un groupe fini de $n! = 1.2.\cdots.n$ elements.

On peut representer une permutation par un tableau a deux lignes et n colonnes

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'identite est ainsi codee par

$$\mathrm{Id}_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

alors que

$$c_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

est la permutation (dite cylique) qui envoie

$$1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3, \cdots, n \mapsto n-1,\ n \mapsto 1$$

1. Representer de cette maniere tous les elements de $\mathfrak{S}_2$ et montrer que ce groupe est commutatif.
2. Representer ainsi tous les elements de $\mathfrak{S}_3$ et montrer que ce groupe n'est pas commutatif.

3. Pour $n = 4$, on considere

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

les permutations qui envoient respectivement

$$\theta : 1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 2,\ \tau : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 2.$$

Calculer

$$\theta \circ \tau, \tau \circ \theta,\ \theta^2,\ \theta^3,\ \theta^n,\ \tau^n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

4. On note

$$\mathfrak{S}_{4,3} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4,\ \sigma(3) = 3\}$$

l'ensemble des bijections qui envoient 3 sur 3 ; on appelle cet ensemble le stabilisateur de 3. Donner tous les elements de $\mathfrak{S}_{4,3}$. Montrer que $\mathfrak{S}_{4,3}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$. Est ce que ce groupe est engendre par θ et τ ?

Sous-groupes

Exercice 2 (Centraliseur/Centre)**.** Soit $(G, .)$ un groupe et $g \in G$, le centralisateur de g est le sous-ensemble

$$\mathrm{C}_G(g) = \{h \in G, h.g = g.h\}$$

(c'est l'ensemble des elements h de G qui commutent avec g).

Le centre de G est le sous-ensemble

$$Z(G) = \{z \in G,\ \text{pour tout } g \in G,\ z.g = g.z\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{C}_G(g)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe commutatif de G.

Exercice 3. Soit X un ensemble et $\mathfrak{S}_X = \mathrm{Bij}(X, X)$ son groupe symetrique (equipe de la composition des bijections).

1. Soit $x_0 \in X$. Montrer que l'ensemble

$$\mathfrak{S}_{X,x_0} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_X,\ \sigma(x_0) = x_0\}$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_X$. On l'appelle le stabilisateur de x_0 dans $\mathfrak{S}_X$.

Exercice 4 ($\star$)**.** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H, K \subset G$ des sous-groupes.

1. Montrer que si G est commutatif alors
$$H \cdot K = \{h \cdot k,\ h \in H,\ k \in K\}$$
est un sous-groupe de G et que
$$H \cdot K = \langle H \cup K \rangle$$
(le sous-groupe engendre par les elements de H et K.
2. Si G n'est pas commutatif $H \cdot K$ alors n'est pas un sous-groupe en general (on ne demande PAS de fournir un contre-exemple). Montrer cependant que si K a la propriete suivante : *pour tout $h \in H$ on a*
$$h \cdot K \cdot h^{-1} \subset K$$
(ou on a note $h \cdot K \cdot h^{-1} = \{h \cdot k \cdot h^{-1},\ k \in K\}$), alors $H \cdot K$ est bien un sous-groupe de G. On pourra pour cela utiliser l'identite $e_G = h'^{-1} \cdot h'$ pour des $h' \in H$ bien choisis.

Remarque. Dans ce dernier exercise il est peut-etre plus simple de verifier directement les trois axiomes qui definissent un sous-groupe plutot que d'utiliser le critere de sous-groupe.

Groupes engendres par un ensemble

Exercice 5. Demontrer le Lemme ci-dessous que l'on pourra utiliser dans les exercices suivants

Lemme. *Soit $(G, .)$ un groupe et $A \subset G$ un sous-ensemble. On suppose que $\langle A \rangle = G$ (ie. le groupe G est engendre par A). Soit $B \subset G$ un autre sous-ensemble. On a l'implication*
$$A \subset \langle B \rangle \Longrightarrow G = \langle B \rangle$$
(si le sous-groupe engendre par B contient A alors c'est G tout entier).

Exercice 6. Soit le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On rappelle que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $q.\mathbb{Z}$ pour $q \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ on a
$$\langle m, n \rangle = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$$
(ou $\langle m, n \rangle$ designe le sous-groupe engendre par m et n (ie par le sous-ensemble $\{m, n\}$).

2. Montrer que le groupe engendre par 3 et 73 vaut $\mathbb{Z}$ en montrant de maniere explicite qu'il contient 1.
3. Montrer (en utilisant Bezout) que pour $m, n \in \mathbb{Z}$, le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendre par m et n est
$$\langle m, n\rangle = pgcd(m, n).\mathbb{Z}.$$

Quelques morphismes

Exercice 7. Soit $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ et $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \boxplus)$ le groupe des classes de congruences modulo q.

1. Montrer que l'application (de reduction modulo q)
$$\bullet \,(\mathrm{mod}\, q) : a \in \mathbb{Z} \mapsto a \,(\mathrm{mod}\, q) = a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$
est un morphisme de groupes.

Exercice 8. Soient $(G, \star)$ et $(H, *)$ des groupes et $(G \times H, \otimes)$ le groupe produit :
$$(g, h) \otimes (g', h') = (g \star g', h * h').$$

1. Montrer que les projections sur la premiere et deuxieme coordonnee
$$\pi_G : (g, h) \in G \times H \to g \in G$$
et
$$\pi_H : (g, h) \in G \times H \to h \in H$$
sont des morphismes de groupes de $G \times H$ vers G et H respectivement.