

Série 2

Tous les exercices seront corrigés. La correction sera postée sur le moodle après environ 2 semaines.

Exercice 1. On considère l'application

$$f : x \in \mathbb{R}_{\geq -2} \mapsto x^3 - x \in \mathbb{R}.$$

1. Que vaut $f_*([-2, +\infty[)$? Que vaut $f_*([0, +\infty[)$?
2. Que vaut $f^{(-1)}([0, +\infty[)$? Que vaut $f^{(-1)}([-2, +\infty[)$?
3. Cette application est-elle injective ?
4. Cette application est-elle surjective ?
5. Comment modifier l'espace d'arrivée pour la rendre surjective ?
6. Trouver x_0 le plus petit possible pour cette application soit injective quand on la restreint à $\mathbb{R}_{\geq x_0}$.

Exercice 2. Soient X, Y, Z des ensembles (pas forcément finis mais non vides) et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des applications entre les ensembles X et Y et les ensembles Y et Z et $g \circ f : X \rightarrow Z$ l'application composée.

On a vu que si f et g sont injectives (resp. surjectives,) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective)¹.

On va examiner des réciproques de ces faits.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Donner un exemple montrant que f n'est pas forcément surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Donner un exemple (avec X ayant au moins 2 éléments) montrant que g n'est pas forcément injective.

Exercice 3. Soit $f : X \mapsto Y$ une application entre ensembles. Pour $A \subset X$ un sous-ensemble, on notera pour simplifier l'image de A par X par $f(A) \subset Y$ (au lieu de $f_*(A)$). Pour $C \subset Y$ on notera la préimage par $f^{(-1)}(C)$ (au lieu de $f^*(C)$).

1. Que vaut $f(\emptyset)$?

1. En particulier si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

2. Montrer que pour tout sous-ensembles $A, B \subset X$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

3. (a) Montrer que pour tout $A, B \subset X$ des sous-ensembles, on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B);$$

(b) Donner un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(c) Montrer que si f est injective on a

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

4. Montrer que pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$, on a

$$f^{(-1)}(C \cup D) = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D).$$

5. Montrer que pour tout pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$, on a

$$f^{(-1)}(C \cap D) = f^{(-1)}(C) \cap f^{(-1)}(D).$$

6. Montrer que

$$f \text{ est injective} \iff \forall A \subset X, f^{(-1)}(f(A)) = A.$$

7. Montrer que

$$f \text{ est surjective} \iff \forall C \subset Y, f(f^{(-1)}(C)) = C.$$

Exercice 4. ("Cantor, encore!") Construire une application bijective

$$C_3 : \mathbb{N}^3 \simeq \mathbb{N}$$

qui est "polynomiale", c'est à dire qu'il existe une fonction polynomiale en trois variables à coefficients rationnels,

$$P(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k \geq 0} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k$$

(avec $a_{i,j,k}$ des nombres rationnels) telle que

$$\forall (l, m, n) \in \mathbb{N}^3, C_3((l, m, n)) = P(l, m, n).$$

Pour ce faire on pourra utiliser le fait que l'on connaît (Feuille 1) une application polynomiale bijective

$$C_2 : \mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$$

et le fait que

$$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}.$$

Exercice 5. Pour x un nombre rationnel on note $\lfloor x \rfloor$ la fonction "plancher" ("floor") de x , ie. le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Montrer que l'application

$$(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto m + (n + \lfloor (m + 1)/2 \rfloor)^2 \in \mathbb{N}$$

et une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N} (mais ce n'est pas une application polynomiale!).