

# Série 1

---

Tous les exercices seront corrigés. La correction sera postée sur le moodle Lundi ou Mardi de la semaine suivante.

## 1 Recurrences

**Exercice 1.** Le principe de récurrence est la proposition suivante :

**Proposition 1.** Soit  $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$  un sous-ensemble de l'ensemble des entiers et  $n_0 \geq 0$  un entier. On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées

1.  $n_0 \in \mathcal{N}$ ,
2. et que si  $n \in \mathcal{N}$  alors  $n+1 \in \mathcal{N}$  ( $n+1$  est ce qu'on appelle le "successeur" de  $n$  construit pendant le cours : en termes d'ensembles

$$n+1 = \bigcup_{\{n, \{n\}\}} = \{0, 1, \dots, n-1, n\}$$

mais on peut simplement y penser en terme d'entier comme on en a l'habitude).

Alors on a

$$\mathbb{N}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} \subset \mathcal{N}.$$

1. Démontrer cette proposition (dans le langage "classique" avec les objets notion et raisonnement dont vous avez l'habitude ; sans utiliser le langage formel de la logique des prédicats du premier ordre...).

**Exercice 2.** Utiliser le principe de récurrence ci-dessus pour démontrer les résultats suivants

1. Pour tout entier  $n \geq 1$

$$\Sigma_1(n) := 1 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En déduire que pour tout  $n \geq 1$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

2. Redémontrer ce dernier résultat à l'aide du principe de récurrence.
3. Pour tout entier  $n \geq 0$

$$\Sigma_2(n) := 1^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Remarque 1.1.** Dans ces deux cas on ne demande PAS de faire une rédaction avec le classique raisonnement par récurrence en parlant de "Hypothèse Initiale" et "Hypothèse de récurrence, Hérité, etc..." mais de rédiger une preuve "ensambliste" qui introduit dans chaque cas un ensemble  $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$  convenable auxquels on appliquera la Proposition du premier exercice ou la variante.

**Remarque 1.2.** On peut montrer (en particulier grâce au principe de récurrence) que pour tout  $k \geq 0$

$$\Sigma_k(n) := 1^k + \dots + n^k = \sum_{i=1}^n i^k = P_k(n)$$

avec  $P_k(X)$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  de degré  $k+1$ ; eg.  $P_1(X) = \frac{X(X+1)}{2}$ .

**Remarque 1.3.** Il est tout à fait possible d'obtenir ces formules directement sans récurrence : comme vous le savez, alors qu'il n'avait que 10 ans, C.F. Gauss a donné une preuve directe de la formule de  $S_1(n)$  : en écrivant

$$2S_1(n) = (1 + \dots + n) + (n + \dots + 1) = (1+n) + (2+n-1) + \dots + (n-1+2) + (n+1) \dots$$

**Exercice 3.** Soit  $x > -1$  un nombre réel. Montrer en utilisant le principe de récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad (\text{Inégalité de Bernoulli})$$

## 2 Ensembles

**Exercice 4.** On rappelle que si  $E$  est un ensemble, la réunion de  $E$ ,  $\bigcup_E$  est l'ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de  $E$  (on rappelle que ces éléments sont eux-mêmes des ensembles qui peuvent donc posséder des éléments).

1. Soit  $A \neq \emptyset$  un ensemble non vide, montrer que

$$\bigcup_{\{A\}} = A.$$

2. Que valent

$$\bigcup_{\emptyset}, \bigcup_{\{\emptyset\}}, \bigcup_{\{\emptyset, A\}} ?$$

3. Que vaut  $A \cup \emptyset$ ?

**Exercice 5.** Soit  $X$  un ensemble. Pour  $A, B$  des sous-ensembles de  $X$  on définit la différence de  $A$  et  $B$

$$A - B := \{x \in A, x \notin B\} \subset X$$

(les éléments de  $A$  qui ne sont pas des éléments de  $B$ ). En particulier

$$X - A = \{x \in X, x \notin A\} \subset X$$

(l'ensemble des éléments de  $X$  qui ne sont pas dans  $A$ ) est appelé le *complémentaire* de  $A$  dans  $X$  et est noté  $A^c$ .

On définit alors la différence *symétrique* de  $A$  et  $B$  en posant

$$A \Delta B := A \cup B - A \cap B = \{x \in A \cup B, x \notin A \cap B\} \subset X$$

(les éléments de  $X$  qui sont dans la réunion de  $A$  et  $B$  et qui ne sont pas dans leur intersection).

1. Montrer que  $A \Delta B = B \Delta A = (A - B) \cup (B - A)$ .
2. Calculer  $\emptyset \Delta A, A \Delta A, A \Delta X, A \Delta A^c$ .

**Exercice 6.** On considère l'application polynomiale (dite de Cantor)

$$C : (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto ((m+n)^2 + m + 3n)/2 \in \mathbb{N}.$$

1. Vérifier que  $C$  est bien une application de  $\mathbb{N}^2$  vers  $\mathbb{N}$ .
2. Calculer les valeurs  $C(m, n)$  pour  $m+n \leq 3$  et les reporter sur les points  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  d'une représentation du quart de plan  $\{(x, y), x, y \geq 0\}$ .
3. Pour  $k \geq 0$  un entier, on définit le sous-ensemble

$$D_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m+n = k\}.$$

Montrer que les valeurs  $C(m, n)$  quand  $(m, n)$  décrit  $D_k$  forment un interval que l'on précisera (ou pourra travailler par récurrence)?

4. En déduire que pour tout entier  $l \in \mathbb{N}$  il existe un couple  $(m, n)$  tel que

$$C(m, n) = l.$$

Montrer qu'un tel couple  $(m, n)$  est unique. On dit que l'application polynomiale  $C : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  est une bijection entre  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{N}$ .

**Remarque.** Une autre application possible (obtenue par symétrie) est

$$C'(m, n) = ((m+n)^2 + 3m + n)/2.$$

On ne sait pas si il y existe d'autres applications polynomiales établissant une bijection entre  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{N}$ .