

Série 14

Pour cette serie il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Calculs de determinants

Exercice 1. Calculer les determinants des matrices suivantes (pour a, b, c, λ dans un corps K) : utiliser des operations elementaires pour eventuellement vous ramener a des matrices blocs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On suppose $K = \mathbb{C}$. On considere les matrices ($a \in \mathbb{C}$)

$$C = C(a) = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le determinant de C (en fonction de a) par des operations elementaires sur les lignes.
2. Calculer le determinant de C (en fonction de a) par developement de Lagrange le long d'une ligne ou d'une colonne bien choisie.
3. Si la matrice C est inversible pour $a = 1$ calculer son inverse.
4. Montrer (sans le calculer) que $\det D \in \mathbb{Z}$.
5. Calculer le determinant de D (de la maniere que vous preferez) et celui de D^3 .
6. Soit p un nombre premier. On ecrit D_p pour la matrice D mais vue a coefficients dans \mathbb{F}_p (on remplace 77 par $77_p = 77 \cdot 1_{\mathbb{F}_p} = 77 \pmod{p}$) et pareil pour les autres coordonnees). Montrer que

$$\det D_p = \det D \pmod{p}.$$

7. Pour quelles valeurs de p la matrice D_p est elle de rang 6 ?

Exercice 3. Soient E et F les matrices

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & a+5 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\text{cof}(E)$ et $\text{cof}(F)$.
2. Verifier les relations de Cramer

$$E \cdot {}^t\text{cof}(E) = \det(E)\text{Id}_3, F \cdot {}^t\text{cof}(F) = \det(F)\text{Id}_3.$$

3. Si E ou F est inversible, calculer leur inverse.
4. Calculer le polynome caracteristique de F et verifier le Theoreme de Cayley-Hamilton dans ce cas particulier.

Exercice 4. Soit $M = (m_{ij})_{ij \leq d} \in M_d(\mathbb{C})$ une matrice a coefficients complexes. On pose $\overline{M} = (\overline{m_{ij}})_{ij \leq d}$ la matrice obtenue an prenant le conjugué complexe de toutes les coordonnees de M .

1. Montrer que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.
2. Montrer que $\det(M \cdot \overline{M}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
3. Montrer par un exemple que l'on a pas toujours $M \cdot \overline{M} \in M_d(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $P_{car, \overline{M}}(X) = \overline{P_{car, M}(X)}$ ou pour un polynome $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, on a note $\overline{P}(X)$ le polynome dont les coefficients sont les conjuges complexes des coefficients de P .
5. Montrer que le polynome produit $P_{car, M}(X) \cdot P_{car, \overline{M}}(X) \in \mathbb{R}[X]$ (on utilisera le fait que si $x \in \mathbb{C}$ alors

$$x \in \mathbb{R} \iff \overline{x} = x.$$

Quelques groupes de matrices interessants

Exercice 5. Soit K un corps. Une matrice $M \in M_d(K)$ est dite orthogonale si elle verifie

$$M \cdot {}^t M = \text{Id}_d.$$

On note $O_d(K)$ l'ensemble des matrices orthogonales.

1. Montrer que $\det M = \pm 1_K$.
2. Montrer que $O_d(K) \subset \text{GL}_d(K)$ et que $O_d(K)$ est un sous-groupe de $\text{GL}_d(K)$ (le groupe orthogonal).

3. Soit $\text{SO}_d(K) = \{M \in \text{O}_d(K), \det M = 1\}$. Montrer que $\text{SO}_d(K)$ est un sous-groupe distingué de $\text{O}_d(K)$.
4. On suppose que $\text{car}K \neq 2$ (de sorte que $1_K \neq -1_K$). Montrer qu'il existe M^- une matrice orthogonale de déterminant -1 (on cherchera M sous forme diagonale).
5. Montrer que

$$\text{O}_d(K) = \text{SO}_d(K) \sqcup M^- \cdot \text{SO}_d(K).$$

Exercice 6. Soit $M, M' \in M_d(K)$ des matrices triangulaires supérieures par blocs carrés :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 \in M_{d_1}(K), \quad M_2 \in M_{d_2}(K), \quad d_1 + d_2 = d.$$

$$M' = \begin{pmatrix} M'_1 & \star \\ \mathbf{0} & M'_2 \end{pmatrix}, \quad M'_1 \in M_{d_1}(K), \quad M'_2 \in M_{d_2}(K), \quad d_1 + d_2 = d.$$

1. Montrer que

$$M.M' = \begin{pmatrix} M_1.M'_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2.M'_2 \end{pmatrix}$$

Les termes "★" désignent des matrices de taille $d_1 \times d_2$ dont les valeurs sont différentes et qu'on ne dépend pas de calculer et $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{d_2 \times d_1}$ est la matrice nulle de dimensions $d_2 \times d_1$.

2. Montrer que M est inversible ssi M_1 et M_2 le sont et si c'est le cas donner la forme générale de M^{-1} .
3. Soient d_1, d_2 vérifiant $d = d_1 + d_2$ et soit

$$P_{d_1, d_2}(K) = \left\{ M = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 \in \text{GL}_{d_1}(K), \quad M_2 \in \text{GL}_{d_2}(K) \right\}.$$

Montrer que $P_{d_1, d_2}(K)$ forme un sous-groupe de $\text{GL}_d(K)$. On l'appelle le sous-groupe parabolique de type (d_1, d_2) .

4. Soit $P(X) = a_n.X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$ un polynôme et

$$P(M) = \text{ev}_M(P) = a_n.M^n + a_{n-1}.M^{n-1} + \dots + a_0.\text{Id}_d \in M_d(K)$$

son évaluation en la matrice M . Montrer que

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(M_1) & \star \\ \mathbf{0} & P(M_2) \end{pmatrix}.$$

5. Soit V un K -ev de dimension d et $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V . On pose pour $1 \leq d_1 < d$

$$V_1 = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d_1}) = K\mathbf{e}_1 + \dots + K\mathbf{e}_{d_1}.$$

On note $\text{GL}(V) = \text{Aut}(V)$ le groupe des automorphismes de V .

Montrer que

$$\{\varphi \in \text{GL}(V), \varphi(V_1) \subset V_1\} \subset \text{GL}(V)$$

est un sous-groupe de $\text{GL}(V)$.

6. Montrer que pour $\varphi \in \text{GL}(V)$

$$\varphi(V_1) \subset V_1 \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in P_{d_1, d_2}(K)$$

et en deduire une autre preuve que $P_{d_1, d_2}(K)$ est un sous-groupe de $\text{GL}_d(K)$.

La matrice compagnon

Ces exercices servent a la preuve du Thm de Cayley-Hamilton et la correction se trouve dans le cours (mais essayez de faire sans regarder).

Exercice 7. Soit un polynome unitaire de degre d ,

$$P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \dots + b_0 \in K[X].$$

La matrice compagnon de P est la matrice

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(K).$$

On a deja vu en exercice (dans un cas particulier avec $d = 3$) que la matrice compagnon verifie l'equation polynomiale

$$P(M_P) = M_P^d + b_{d-1}M_P^{d-1} + \dots + b_0\text{Id}_d = \mathbf{0}_{d \times d}. \quad (7.1)$$

On va le redemontrer en passant par l'endomorphisme associe.

Remarque. Par exemple pour $K = \mathbb{R}$ la matrice compagnon de $X^2 + 1$ est la matrice

$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui sert a definir le corps des nombres complexes et qui verifie

$$I^2 + \text{Id}_2 = \mathbf{0}_2.$$

On va démontrer (7.1) pour $d \geq 1$ général sans utiliser de calcul matriciel.

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ la base canonique de K^d et

$$\varphi = \varphi_P : K^d \mapsto K^d$$

l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_P$.

1. Montrer que

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \dots, \varphi(\mathbf{e}_{k-1}) = \mathbf{e}_k, \dots, \varphi(\mathbf{e}_{d-1}) = \mathbf{e}_d,$$

que

$$\varphi^k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_{k+1}, \quad k \leq d-1$$

et que

$$\varphi(\mathbf{e}_d) + b_{d-1}\mathbf{e}_d + b_{d-2}\mathbf{e}_{d-1} + \dots + b_0\mathbf{e}_1 = 0.$$

2. Montrer que

$$\varphi^d(\mathbf{e}_1) + b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_1) + \dots + b_1\varphi(\mathbf{e}_1) + b_0\mathbf{e}_1 = 0$$

et que pour tout $k \geq 2$

$$\varphi^d(\mathbf{e}_k) + b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_k) + \dots + b_1\varphi(\mathbf{e}_k) + b_0\mathbf{e}_k = 0;$$

pour cela on se rappellera que l'image du morphisme d'évaluation en φ

$$K[\varphi] = \{P(\varphi), P \in K[X]\} = \text{ev}_{\varphi}(K[X]) \subset \text{End}_K(K^d)$$

est un sous-anneau commutatif de $\text{End}_K(K^d)$ et que pour $Q, R \in K[X]$ des polynômes on a

$$Q(\varphi) \circ R(\varphi) = R(\varphi) \circ Q(\varphi).$$

3. Montrer que

$$\varphi^d + b_{d-1}\varphi^{d-1} + \dots + b_1\varphi + b_0\text{Id}_{K^d} = 0$$

et (7.1).

Exercice 8. Soit

$$P_{\text{car}, M_P}(X) = \det(X \cdot \text{Id}_d - M_P) \in K[X]$$

le polynôme caractéristique de la matrice compagnon.

1. Montrer que

$$P_{\text{car}, M_P}(X) = P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \dots + b_0.$$

Pour cela echelonner la matrice

$$X.\text{Id}_d - M_P = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

par une suite d'operations de type (III) (dans le corps $K(X)$ des fractions rationnelles a coefficients dans K) pour la mettre sous la forme triangulaire

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & X & 0 & 0 & f_1(X) \\ 0 & 0 & X & 0 & f_2(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_d(X) \end{pmatrix}$$

avec $f_1(X), \dots, f_d(X) \in K(X)$ des fractions rationnelles en X .

2. Recalculer le determinant $\det(X.\text{Id}_d - M_P)$ en le developpant par rapport a la derniere colonne (Lagrange).
3. Montrer que M_P est inversible ssi $b_0 \neq 0$ et montrer qu'alors

$$M_P^{-1} = Q(M_P)$$

avec

$$Q(X) = (-b_0^{-1})(X^{d-1} + b_{d-1}X^{d-2} + \dots + b_1) \in K[X].$$

Remarque. On a montre que le polynome caracteristique $P_{car, M_P}(X)$ de la matrice compagnon M_P est precisement $P(X)$. D'autre part par (7.1), on a montrer que

$$P_{car, M_P}(M_P) = P(M_P) = \mathbf{0}_{d \times d}.$$

En d'autre termes, on a demontre le Theoreme Cayley-Hamilton (*pour tout matrice M on a $P_{car, M}(M) = \mathbf{0}_{d \times d}$*) dans le cas particulier des matrices compagnon.

Dans ce cours, la preuve que nous proposons du Theoreme Cayley-Hamilton consiste precisement a nous ramener au cas des matrices compagnons (il y a d'autres preuves utilisant la formule de Cramer).