EPFL Automne 2025
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 13

Pour cette serie et la suivante il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicite du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 2$ de sorte que $1_K \neq -1_K$.

Exercice 1. On considere la matrice suivante

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application lineaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ dans les bases canoniques.

1. En reduisant un systeme lineaire convenable trouver des bases du noyau et de l'image de φ ainsi que des equations cartesiennes de ces sous-espaces (avec un nombre minimal d'equations).

"Rappels" sur le groupe symetrique

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \cdots, n\})$ le groupe des permutations de n elements.

On rappelle qu'il existe une application bien definie (la signature) a valeurs dans le groupe $\{\pm 1\}$

$$\mathrm{sign} : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}$$

definie par

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^t$$

ou t est tel que $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_t$ ou les τ_i sont des transpositions. On rappelle egalement que sign est un morphisme de groupes.

Exercice 2. On va montrer que la signature est en fait le SEUL morphisme de groupes a valeurs dans $\{\pm 1\}$ qui n'est pas le morphisme constant egal a 1.

1. Soit G un groupe et $\varphi : G \mapsto C$ un morphisme vers un groupe commutatif C. Montrer que pour tout $g, h \in G$ on a
$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h).$$
2. Soit K un corps de caracteristique $\neq 2$ (on ecrira 1 et -1 pour les image de 1 et -1 dans K par le morphisme canonique) et $s : \mathfrak{S}_n \mapsto K^\times$ un morphisme non-trivial (different du morphisme constant $\underline{1}$) a valeurs dans le groupe multiplicatif $K^\times$; montrer que pour toute transposition τ, $s(\tau) \in \{\pm 1\}$. Montrer qu'il existe une transposition τ telle que $s(\tau) = -1$.
3. Montrer que pour toute transposition τ' on a $s(\tau') = -1_K$ et que $s = \mathrm{sign}$. On pourra utiliser que les transpositions sont toutes conjuguees entre elles.
4. Montrer que
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) = 0.$$
Pour cela on pourra considerer une transposition τ et faire le changement de variable $\sigma \leftrightarrow \sigma\tau$ dans la somme ci-dessus pour montrer qu'elle s'annule.

Exercice 3. Soit
$$\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \mathrm{sign}(\sigma) = +1\}$$
l'ensemble des permutations de signature $+1$.

Cet ensemble s'appelle le groupe alterne.

1. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ et qu'il est distingue.
2. Soit
$$\mathrm{sign}^{(-1)}(\{-1\}) = \{\sigma' \in \mathfrak{S}_n,\ \mathrm{sign}(\sigma') = -1\}$$
l'ensemble des permutations de signatures -1. Montrer que pour toute transposition τ on a
$$\mathrm{sign}^{(-1)}(\{-1\}) = \tau \circ \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n \circ \tau$$
avec
$$\tau \circ \mathfrak{A}_n = \{\tau \circ \sigma,\ \sigma \in \mathfrak{A}_n\}.$$
3. En deduire que $|\mathfrak{A}_n| = n!/2$.

Formes multilineaires/symetriques/alternees

On note $\mathrm{Mult}^{(n)}(V)$ l'espace des formes multilineaires en n variables sur V a valeurs dans K et $\mathrm{Alt}^{(n)}(V)$ l'espace des formes alternees.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ et $\sigma : \{1, \cdots, n\} \mapsto \{1, \cdots, n\}$ une permutation de $\{1, \cdots, n\}$.

1. Montrer que
$$\sigma.\bullet_{:} \Lambda \mapsto \sigma.\Lambda$$
definie par
$$\sigma.\Lambda : (v_1, \cdots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$$
est une application lineaire de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V)$.
2. Soient $l_1, \cdots, l_n : V \mapsto K$ des forme lineaires (pas forcement distinctes) montrer que
$$\sigma.(l_1 \otimes \cdots \otimes l_n) = l_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes l_{\sigma^{-1}(n)}$$
ou σ^{-1} est la permutation reciproque.
3. Montrer que $\sigma.\bullet$ envoie le sous-espace $\mathrm{Alt}^{(n)}(V)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V)$ et que c'est un isomorphisme.

Exercice 5. On dit qu'une forme $\Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V)$ est symmetrique ssi
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma.\Lambda = \Lambda.$$
On note $\mathrm{Sym}^{(n)}(V) \subset \mathrm{Mult}^{(n)}(V)$ l'ensemble des formes symmetriques.

1. Montrer que $\mathrm{Sym}^{(n)}(V)$ est un SEV de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V)$.
2. Montrer que $\sigma.\bullet$ envoie le sous-espace $\mathrm{Sym}^{(n)}(V)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V)$ et que c'est un isomorphisme.

Exercice 6. Les notations comme ci-dessus

1. Montrer que si $\mathrm{car}K \neq 2$,
$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V) \cap \mathrm{Sym}^{(n)}(V) = \{\underline{\mathbf{0}}_K\}$$
(ie. ils sont en somme directe).
2. Montrer que si $\mathrm{car}K = 2$,
$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V) \subset \mathrm{Sym}^{(n)}(V).$$
3. On suppose $\mathrm{car}K \neq 2$. Montrer que si $n = 2$ on a
$$\mathrm{Mult}^{(2)}(V) = \mathrm{Alt}^{(2)}(V) \oplus \mathrm{Sym}^{(2)}(V)$$
(toute forme bilineaire peut se decomposer de maniere unique en la somme d'une forme bilineaire alternee et d'une forme bilineaire symetrique ; ce n'est pas vrai pour $n \geqslant 3$). Pour cela on pourra considerer les formes multilineaires
$$\Lambda(v_1, v_2) + \Lambda(v_2, v_1)$$
et
$$\Lambda(v_1, v_2) - \Lambda(v_2, v_1).$$

Exercice 7. Soit $\varphi : V \mapsto V$ une application lineaire. Pour toute forme multilineaire Λ en n variables, on definit

$$\varphi^*(\Lambda) : (v_1, \cdots, v_n) \mapsto \Lambda(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)).$$

1. Verifier que $\varphi^*(\Lambda)$ est multilineaire et qu'elle est alternee ou symetrique si Λ l'est.

Exercice 8. Soit V de dimension d. Dans le cours on a montre que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ la forme

$$\det_{\mathscr{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) \mathbf{e}^*_{\sigma(1)} \otimes \cdots \mathbf{e}^*_{\sigma(d)}$$

est alternee : si $(v_1, \cdots, v_d)$ est tel que $v_i = v_j$ pour $i \neq j$ alors $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \cdots, v_d) = 0$.

On va montrer cela quelque soit la caracteristique du corps.

On a montre en cours que

$$\forall \tau \in \mathfrak{S}_d,\ \tau.\det_{\mathscr{B}} = \mathrm{sign}(\tau)\det_{\mathscr{B}} \tag{8.1}$$

et on en a deduit que pour $\mathrm{car} K \neq 2$, $\det_{\mathscr{B}}$ est alternee.

On ne suppose rien sur la caracteristique et on admet (8.1) (dont la preuve marche en toute caracteristique) et les resultats de l'exercice 3. On se donne $(v_1, \cdots, v_d)$ tel que $v_i = v_j$ pour $i \neq j$ et on veut montrer que

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \cdots, v_d) = 0.$$

1. Soit $\tau = (12)$ (la transposition qui echange 1 et 2). Montrer qu'on a (union disjointe)

   $$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \sqcup \tau \circ \mathfrak{A}_n$$

   puis que

   $$\det_{\mathscr{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_d} \mathbf{e}^*_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{e}^*_{\sigma(2)} \otimes \cdots \mathbf{e}^*_{\sigma(d)} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_d} \mathbf{e}^*_{\sigma(2)} \otimes \mathbf{e}^*_{\sigma(1)} \otimes \cdots \mathbf{e}^*_{\sigma(d)}$$

2. En deduire que

   $$\det_{\mathscr{B}}(v, v, v_3, \cdots, v_d) = 0.$$

3. Montrer que $\det_{\mathscr{B}}$ est alternee.

Symetrisation

Dasn cette serie on considere deux endomorphismes de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V)$:

$$\bullet_{\mathrm{sign}} : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma.\Lambda$$

et

$$\bullet_1 : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma.\Lambda$$

Exercice 9. On suppose $n = 2$ et soit V un EV de dimension $d \geqslant 2$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?
3. On suppose $d = 2$ et $v_1, v_2 \in V$. Exprimer $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2)$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_1(v_1, v_2)$ en fonction des coordonnees de v_1, v_2 dans la base $\mathscr{B}$ $(x_{ij})_{i,j \leqslant 2}$

Exercice 10. On suppose $n = 3$ et soit V un EV de dimension $d \geqslant 3$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?

Exercice 11. On considere le cas n general.

1. Montrer que $\bullet_1$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V)$ et que $\bullet_{\mathrm{sign}}$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V)$.
2. Montrer que $\mathrm{Sym}^{(n)}(V)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_{\mathrm{sign}}$ et que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_1$ (utiliser l'exercice 2 (4)).
3. Calculer Λ_{sign} si Λ est alternee.
4. Calculer Λ_1 si Λ est symetrique.

Un peu de determinants

Exercice 12. Soit V un K-ev de dimension d et $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V fixee. Soit $\sigma : \{1, \cdots, d\} \mapsto \{1, \cdots, d\}$ une permutation. On a vu dans la serie precedente qu'on peut lui associe une unique application lineaire φ_σ qui envoie chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ sur le vecteur $\mathbf{e}_{\sigma(i)}$ pour $i \leqslant d$:

$$\text{si } v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d \text{ alors } \varphi_\sigma(v) = x_1\mathbf{e}_{\sigma(1)} + \cdots + x_d\mathbf{e}_{\sigma(d)}.$$

1. Que vaut $\varphi_\sigma^*(\mathbf{e}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_d^*)$ (montrer que c'est un produit tensoriel de formes lineaires explicites) ?
2. Montrer que $\det(\varphi_\sigma) = \text{sign}(\sigma)$, soit par un calcul direct soit en montrant que pour τ une transposition $\det(\varphi_\tau) = -1$ et en considerant l'application

$$\sigma \mapsto \det(\varphi_\sigma)$$

conjointement avec l'exercice 2.

Exercice 13. Soit V un $\mathbb{Q}$-ev de dimension d.

1. On suppose $d = 3$. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $\varphi \in \text{End}(V)$ qui verifie

$$\varphi^{2025} = 2025.\text{Id}_V$$

(montrer que le determinant $\det \varphi$ satisfait une equation polynomiale et etudier les solutions rationelles possibles d'une telle equation).
2. Montrer que $d = 2025$ est la dimension de V la plus petite possible telle qu'il existe $\varphi \in \text{End}(V)$ qui verifie

$$\varphi^{2025} = 2025.\text{Id}_V.$$

Polynomes et corps

Soit K un corps et $K[X]$ la K-algebre des polynomes a coefficients dans K. On note

$$K[X]_{\leqslant n} = \{a_nX^n + \cdots + a_0,\ a_i \in K\}$$

le SEV des polynomes de degree $\leqslant n$ (c'est un K-ev de dimension $n+1$).

On rappelle qu'un polynÙme non-constant est ireductible[1] ssi pour tout polynome P qui n'est pas divisible par Q alors

$$Q.K[X] + P.K[X] = K[X].$$

Soit V un K-EV de dimension d et $\text{End}(V)$ la K-algebre des endomorphismes.

On va donner une methode generale de construvtion de corps de matrices.

1. on a vu dans la serie precedente que c'est une condition equivalente a la definition originale d'irreductibilite

Exercice 14. Pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(V) - \{\underline{0}_V\}$ on dispose alors d'un morphisme de K-algebres (evaluation en φ) donne en posant $\varphi^0 = \mathrm{Id}_V$

$$\mathrm{ev}_\varphi : P \in K[X] \to P(\varphi) = a_n\varphi^n + \cdots + a_0\mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}(V).$$

1. Montrer qu'il existe $Q(X) \notin K$ et de degree $\leqslant d^2$ tel que

   $$Q(\varphi) = \underline{0}_V.$$

   On pourra considerer la restriction de ev_φ au SEV $K[X]_{\leqslant d^2}$.
2. On suppose que $Q(X)$ est irreductible ; on va montrer qu'alors

   $$K[\varphi] = \{P(\varphi),\ P \in K[X]\} \subset \mathrm{End}(V)$$

   (l'image de $K[X]$ par ev_φ) est un sous-corps de $\mathrm{End}(V)$ (qui contient φ comme "racine de Q). Montrer deja que $K[\varphi]$ est un anneau commutatif non-nul .
3. Il reste a montrer que tout element non-nul de $K[\varphi]$ est inversible. Soit $P(\varphi) \in K[\varphi] - \{0_V\}$. Montrer que P n'est pas divisible par Q et qu'il existe $A, B \in K[X]$ tels que $Q(X)A(X) + P(X)B(X) = 1$; en deduire que $P(\varphi)$ est inversible et donner son inverse.