EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 12

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

1 Resolution de systemes lineaires

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un parametre. Resoudre le systeme suivant (en fonction de a).

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & - & y & + & 4z & + & t & = u \\ 6x & + & y & - & z & + & 2t & = v \\ & & y & + & az & + & 3t & = w \end{array}$$

En particulier,

1. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales et donner une representation cartesienne de l'ensemble des (u, v, w) admettant au moins une solution.
2. Donner une base de l'espace des solutions quand $(u, v, w) = (0, 0, 0)$.

Exercice 2. Soit K un corps quelconque. Resoudre dans K le systeme ci-dessous (d'inconnues x, y, z, t, u) :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & + & 4y & + & 3z & + & 11t & - & 10u & = a \\ -x & - & 2y & + & 2z & + & 5t & + & 6u & = b \\ & & & & 4z & + & 12t & - & 2u & = c \\ 3x & + & 6y & - & 2z & - & 3t & + & 5u & = d \end{array}$$

En particulier (prendre garde que les reponses peuvent dependre de la caracteristique du corps $\mathrm{car}(K)$)

1. Donner une condition necessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le systeme ai au moins une solution.
2. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales.
3. Donner quand $a = b = c = d = 0$, une representation parametrique de l'espace des solutions.

Exercice 3. On considere la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application lineaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. Donner une representation cartesienne de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\ker(\varphi)$.
2. donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ (on pourra utiliser l'exercice 8).
3. On remplace $\mathbb{Q}$ par un corps K de caracteristique 2. Refaire l'exercice.

Exercice 4 ($\star$)**.** Soit $V = \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$ le $\mathbb{R}$-EV des polynomes de degre $\leqslant 3$; une base est donnees par les monomes $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. On considere l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3} & \mapsto & \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3} \\ P & \mapsto & X^2.P'' - (1+X)P' + P \end{array}.$$

Ici P' et P'' designent les derivees premieres et secondes de P.

1. Ecrire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
2. Resoudre le systeme $\varphi(P) = 0$ et en deduire une base de $\ker(\varphi)$.
3. Donner les equations cartesiennes de $\varphi(V)$.
4. Donner une base de de $\varphi(V)$ (on pourra utiliser l'exercice 8).

Inversion de matrices

Exercice 5. Soit K un corps de caracteristique $\neq 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & -3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determiner en fonction de $\mathrm{car}(K)$ quand cette matrice est inversible.
2. Quand c'est le cas, calculer son inverse.

Exercice 6. Soit $K = \mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ -1+i & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la reponse tous les nombres complexes present devront etre sous la forme $a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$: par exemple on ecrira $1/2 - i/2$ au lieu de $1/(1+i)$.

Matrices de permutation

Exercice 7. Soit $d \geqslant 1$, on note $\mathfrak{S}_d = \mathrm{Bij}(\{1, \cdots, d\})$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, d\}$ (equipe de la composition). Dans cet exercise vous aurez le droit d'utiliser ce que vous savez sur la structure du groupe $\mathfrak{S}_d$.

Soit V un K-ev de dimension d et $\mathscr{B}_d = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V fixee.

Soit $\sigma : \{1, \cdots, d\} \mapsto \{1, \cdots, d\}$ une permutation. On lui associe l'unique application lineaire φ_σ qui envoie chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ sur le vecteur $\mathbf{e}_{\sigma(i)}$ pour $i \leqslant d$:

$$\text{si } v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d \text{ alors } \varphi_\sigma(v) = x_1\mathbf{e}_{\sigma(1)} + \cdots + x_d\mathbf{e}_{\sigma(d)}.$$

1. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_d$ deux permutations. Calculer $\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau$ (en regardant son action sur un ensemble convenable de vecteurs).
2. Montrer que φ_σ est inversible et calculer son inverse.
3. Quand $d = 2, 3$ donner les matrices $M_\sigma = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_\sigma)$ des φ_σ calculees dans la base $\mathscr{B}_d$ (ces matrices sont appellees matrices de permutations).
4. Par echalonement-reduction re-demontrer que $M_{(123)}$ est inversible et que son inverse est une matrice de permutation.
5. Montrer que $\sigma \mapsto M_\sigma$ defini un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_d$ vers $\mathrm{GL}_d(K)$. L'image s'appelle le groupe des matrices de permutations.

Remarque. On rappelle que tout groupe fini G peut etre realise comme (ie. par injection dans) un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_{|G|}$. Cet exercice montre donc que tout groupe fini peut etre realise comme un sous-groupe du groupe des matrices inversibles $\mathrm{GL}_d(K)$ (avec $d = |G|$). On appelle cela la *linearisation d'un groupe abstrait* : cela permet de ramener certaines questions de la theorie des groupes finis a des questions d'algebre lineaire.

A la recherche de bases

Exercice 8. Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$. Pour $j = 1, \cdots, d$ on note $C_j = C_j(M) \in \mathrm{Col}_{d'}(K)$ la j-ieme colonne de M. On note

$$W = \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_d) \subset \mathrm{Col}_{d'}(K)$$

l'espace vectoriel engendre par les vecteurs colonnes.

Soient $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d$ les echelons de la forme reduite R (pour les operations sur les lignes) de M .

1. Montrer que $\{C_{j_1}, \cdots, C_{j_r}\}$ forme une base de W. Pour cela on pourra ecrire $R = T.M$ et on considerera les colonnes

$$T.C_j,\ j = 1, \cdots, d$$

en se souvenant que T est inversible.

Remarque 1.1. Cet exercice permet etant donne $\varphi : V \to W$ lineaire de trouver une base de l'image $\varphi(V)$ en considerant la matrice $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(\varphi)$.

Unicite de la forme reduite (d'apres Yinghan)

Exercice 9. ($\star\star$) Soient $R, R' \in M_{d' \times d}(K)$ deux matrices echelonnees reduites et qui sont lignes equivalentes. On veut montrer que

$$R = R'.$$

Pour $L = (x_1, x_2 \cdots, x_d) \in K^d$ un vecteur ligne et $1 \leqslant j \leqslant d$, on note

$$e_j^*(L) = x_j$$

la j-ieme coordonnee (dans la base canonique) de L.

Soient $L_1, \cdots, L_r,\ L'_1, \cdots, L'_r \subset K^d$ les lignes non-nulles de R et R' (comme R et R' sont lignes equivalentes elles ont meme rang donc $r = r'$), et soit

$$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d, 1 \leqslant j'_1 < \cdots < j'_r \leqslant d$$

les positions des pivots de R et R' et

$$W(R) = \mathrm{Vect}(\{L_1, \cdots, L_r\}),\ W(R') = \mathrm{Vect}(\{L'_1, \cdots, L'_r\}) \subset K^d$$

les espaces vectoriels engendres par les lignes (non-nulles) de R et R'. On notera egalement pour $1 \leqslant i \leqslant r$

$$W_i(R) = \mathrm{Vect}(\{L_i, L_{i+1}, \cdots, L_r\}),\ W_i(R') = \mathrm{Vect}(\{L'_i, L'_{i+1}, \cdots, L'_r\}).$$

En particulier $W_1(R) = W(R),\ W_r(R) = K.L_r$ et $W_{i+1}(R) \subset W_i(R)$.

1. Pourquoi a t'on $W(R) = W(R')$?
2. Montrer que pour $1 \leqslant i, k \leqslant r$, on a
$$e^*_{j_i}(L_k) = \delta_{k=i}$$
et en deduire que pour tout $L \in W(R)$ on a
$$L = \sum_{i=1}^{r} e^*_{j_i}(L) L_i$$
(pour la deuxieme partie, on ecrira L comme CL des $L_i,\ i \leqslant r$) et on identifiera les coefficients en appliquant les formes lineaires $e^*_{j_i}$.
3. Montrer que pour $L \in K^d$, on a
$$L \in W(R) \Longrightarrow \forall j < j_1,\ e^*_j(L) = 0.$$
4. En deduire que $j'_1 \geqslant j_1$ puis que $j'_1 = j_1$ (en observant que R et R' ont des roles symetriques).
5. Montrer que pour $L \in W(R)$, on a
$$L \in W_i(R) \Longleftrightarrow \forall j < j_i,\ e^*_j(L) = 0.$$
6. Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ et tout $j < j'_i$ on a $e^*_j(L'_i) = 0$.
7. Montrer que $L'_2 \in W_2(R)$ (utiliser que que $j'_2 > j'_1 = j_1$), puis que $j'_2 \geqslant j_2$ et enfin que $j'_2 = j_2$.
8. Montrer (par recurrence) que pour $i = 1, \cdots, r,\ j_i = j'_i$.
9. En deduire que pour $i = 1, \cdots, r$ $L'_i = L_i$ puis que $R = R'$ (on appliquer la premiere partie de la Question 2 aux L'_k en utilisant que $j'_i = j_i$).

Un peu de multilinearite

Exercice 10. Soit V un K-EV et $n \geqslant 1$. On rappelle qu'une fonction

$$\Lambda : V^n \to K$$

est multilineaire si pour tout $(v_1, \cdots, v_n) \in V^n$ les n fonctions suivantes (en une variable) sont lineaires

$$\begin{aligned}
v \in V &\mapsto \Lambda(v, v_2, \cdots, v_n) \in K \\
v \in V &\mapsto \Lambda(v_1, v, \cdots, v_n) \in K \\
&\vdots \\
v \in V &\mapsto \Lambda(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \cdots, v_n) \in K \\
v \in V &\mapsto \Lambda(v_1, \cdots, v_{n-1}, v) \in K.
\end{aligned}$$

sont toutes lineaires.

Soit $(V^*)^{\otimes n}$ l'espace des formes multilineaires en n variable.

1. Montrer que $(V^*)^{\otimes n}$ est un SEV de l'espace des fonctions $\mathcal{F}(V^n; K)$ (pour l'addition et la multiplication par les scalaires usuelle).
2. On dit que forme $\Lambda \in (V^*)^{\otimes n}$ est alternee si

$$\Lambda(v_1, \cdots, v_n) = 0$$

pour tout uplet de vecteurs $(v_1, \cdots, v_n) \in V^n$ qui a deux composantes egales : il existe deux indices distincts $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ tels que $v_i = v_j$. Montrer que l'ensemble des formes alternees $\mathrm{Alt}^{(n)}(V)$ est un SEV de $(V^*)^{\otimes n}$.

Polynomes sur un corps

Soit $K[X]$ l'anneau des polynomes sur un corps K.

On rappelle qu'etant donne Q, P des polynomes, on dit qu'un polynome Q divise un polynome P (ou que P est un multiple de Q) et on le note $Q|P$ si il existe un polynome S tel que

$$P = Q.S.$$

L'ensemble des multiples de Q est note

$$(Q) = Q.K[X] = \{Q.S,\ S \in K[X]\}.$$

Dans la serie precedente on a montre que

— $K[X]$ possede une division euclidienne : pour tout $Q \in K[X]-\{0\}$ et $P \in K[X]$ il existe une unique paire (S, R) de polynomes tels que

$$P = Q.S + R \text{ avec } \deg R < \deg Q.$$

— On en a deduit que tout ideal $I \subset K[X]$ est en fait de la forme

$$I = (Q) := Q.K[X] = \{Q.S,\ S \in K[X]\}$$

pour un certain polynome $Q = Q_I$ (c'est a dire que tout ideal I est l'ensemble, note (Q) des multiples d'un polynome $Q = Q_I$).

Dans cette serie on va etudier la factorisation et les racines des polynomes.

Etant donne un polynome P, l'ensemble des racines de P est l'ensemble

$$\mathrm{rac}_P(K) = \{x \in K,\ P(x) = 0\}.$$

On a $\mathrm{rac}_0(K) = K$ et pour tout $\lambda \in K^\times$ $\mathrm{rac}_\lambda(K) = \emptyset$ (on voit λ comme le polynome constant egal a λ, de degre 0).

Exercice 11. Soit P un polynome non-constant (ie. $\deg P \geqslant 1$) et $\mathrm{rac}_P(K)$ l'ensemble de ses racines.

1. Montrer que $x \in \mathrm{rac}_P(K)$ si et seulement si P est un multiple de $X - x$ (utiliser la division euclidienne par le polynome de degre 1, $X - x$).
2. Soit $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset K$ un ensemble de n scalaire distincts. Montrer que

$$x_1, \cdots, x_n \in \mathrm{rac}_P(K)$$

   ssi P est un multiple du produit $(X - x_1). \cdots .(X - x_n)$.
   On pourra pour cela proceder par recurrence sur n (on vient de faire le cas $n = 1$) et on se souviendra qu'un corps est integre.
3. En comparant des degres montrer que

$$|\mathrm{rac}_P(K)| \leqslant \deg P.$$

   (un polynome non-nul a au plus $\deg P$ racines dans un corps).

On dit qu'un polynome Q est irreducible si il est non-constant et que les seuls polynomes divisant Q sont

1. Les polynomes constants non-nuls.
2. Les multiples scalaires de Q, les polynomes de la forme $\lambda.Q$ avec $\lambda \in K^\times$.

De maniere equivalente,

Exercice 12. Soit Q un polynome non-constant.

1. Montrer que Q est irreductible si et seulement si il n'existe pas de polynome R de degree $0 < \deg R < \deg Q$ tel que $R|Q$.
2. Montrer qu'un polynome de degre 1 est irreductible.
3. Montrer que Q irreductible ssi tout ideal I contenant Q vaut soit $(Q) = Q.K[X]$ soit $K[X]$.
4. Soit Q irreductible et $A \in K[X]$. Montrer que si $Q \not| A$ alors $Q.K[X]+A.K[X] = K[X]$.
5. En deduire le Lemme de Gauss : soit Q irreductible et $A, B \in K[X]$ des polynomes. On suppose que $Q|A.B$; alors ou bien $Q|A$ ou bien $Q|B$.

   Pour cela, on supposera que $Q \nmid A$ et on observera qu'il existe des polynomes $U, V \in K[X]$ tels que $Q.U + A.V = 1$; on multipliera cette relation par B pour montrer que $Q|B$.
6. Montrer que tout polynome non-constant P peut s'ecrire comme produit de polynomes irreductibles :
   $$P = Q_1.\cdots Q_n$$
   avec Q_i irreductibles.

   On procedera par recurrence sur $\deg P$ en notant que si P est deja irreducible, on a fini.
7. Montrer que le nombre de facteurs irreductible n est inferieur a $\deg P$.