

Série 11

Tous les exercices seront corrigés.

Vous êtes fortement encouragés à essayer de résoudre (éventuellement à plusieurs) l'exercice (★) et à rendre votre solution (éventuellement à plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (éventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative à cette série.

Exercice 1. Soit K un corps. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(K)$$

1. Calculer son rang en fonction de $\text{car}(K)$.

Exercice 2. Montrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes mais pas semblables. Pour cela on peut raisonner par l'absurde et considérer un endomorphisme $\varphi : V \rightarrow V$ dont les matrices dans des bases convenables sont M et N . On calculera alors

$$\text{rg}(\varphi - \text{Id}_V)$$

de deux manières différentes.

Exercice 3. Soient $M, N \in M_d(K)$.

1. On suppose qu'il existe $\lambda \in K$ tel que

$$\text{rg}(M - \lambda \cdot \text{Id}_d) \neq \text{rg}(N - \lambda \cdot \text{Id}_d).$$

Montrer que M et N ne sont pas semblables.

2. Montrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes (et même lignes-équivalentes¹) mais pas semblables.

3. Montrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont semblables. Pour cela on identifiera M et N avec des endomorphismes φ, ψ de l'espace $\text{Col}_4(K)$ des vecteurs colonnes de hauteur 4 (dont les matrices dans la base canonique sont M et N). On cherchera des bases de $\ker(\varphi - 2\text{Id}_4)$ et $\ker(\psi - 2\text{Id}_4)$ et on en déduira une base de $\text{Col}_4(K)$ telle que la matrice de φ dans cette base est N .

Exercice 4 (De l'intérêt de changer de base (\star)). Soit K un corps de caractéristique $\neq 3$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x/3 + 4y/3, -x/3 + 5y/3) \end{array}$$

Soit $\mathcal{B} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{(2, 1), (1, 2)\}$

1. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique \mathcal{B}_0 .
2. Montrer que \mathcal{B} est une base de K^2 et exprimer $(1, 0)$ et $(0, 1)$ en fonction de \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 et calculer la matrice N de φ dans cette base de deux manières :
 - Par la formule de changement de base pour les matrices.
 - Directement en exprimant $\varphi(\mathbf{f}_i)$ $i = 1, 2$ en combinaison linéaire de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.
 - Montrer que si on avait $\text{car}(K) = 3$ alors \mathcal{B} ne serait pas une base.
3. Calculer par récurrence N^n pour tout entier $n \geq 0$ (on pose $N^0 = \text{Id}_2$).
4. Montrer par récurrence que si $C \in \text{GL}_2(K)$ et $U \in M_2(K)$ alors pour tout $n \geq 0$

$$(C.U.C^{-1})^n = C.U^n.C^{-1}.$$

5. En déduire une expression (relativement) élémentaire de la puissance M^n pour tout $n \geq 0$.

1. on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes

Exercice 5. Dans ces exercices un rôle implicite important est joué par les SEVs de la forme suivante : pour $\varphi \in \text{End}_K(V)$ et $\lambda \in K$

$$V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V).$$

Si $V_\lambda \neq \{0_V\}$ on dit que λ est une valeur propre de φ et V_λ est le sous-espace propre associé. Les vecteurs de V_λ sont les vecteurs propres de φ pour la valeur propre λ .

L'ensemble des valeurs propre s'appelle le *spectre* de φ :

$$\text{Spec}_\varphi(K) = \{\lambda \in K, V_\lambda \neq \{0_V\}\}.$$

Montrer les propriétés suivantes

1. On a

$$\dim(V_\lambda) = \dim(V) - \text{rg}(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V).$$

2. V_λ est stable par φ : $\varphi(V_\lambda) \subset V_\lambda$ et $\varphi|_{V_\lambda} = \lambda \cdot \text{Id}_{V_\lambda}$.

3. Si $\lambda \neq \lambda'$ sont des valeurs propres distinctes alors $V_\lambda \cap V_{\lambda'} = \{0_V\}$ (les espaces sont en somme directe).

Exercice 6. Soit K un corps. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(K)$$

1. Donner une succession de transformations élémentaires qui transforment M en la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \text{car}(K) = 2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } \text{car}(K) \neq 2$$

Exercice 7. Soient V et W des K -EVs de dimension finie isomorphes (en particulier $\dim V = \dim W = d$). On suppose que ces espaces sont isomorphes : ie. il existe un isomorphisme

$$\psi : V \simeq W.$$

1. Montrer que l'application

$$\text{Ad}(\psi) : \varphi \rightarrow \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

est une application linéaire de $\text{End}(V)$ sur $\text{End}(W)$.

2. Montrer de deux manieres que c'est un isomorphisme de $\text{End}(V)$ sur $\text{End}(W)$ (par un argument de dimension, en trouvant une reciproque).
3. Montrer que $\text{Ad}(\psi)$ est un isomorphisme de K -algebre.
4. Montrer que les groupes lineaires $\text{Aut}(V) = \text{GL}(V)$ et $\text{Aut}(W) = \text{GL}(W)$ sont isomorphes (comme groupes).

Remarque. En particulier on a un isomorphisme

$$\text{GL}(M_d(K)) \simeq \text{GL}(K^{d^2}) = \text{GL}_{d^2}(K)$$

Exercice 8. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \leq d} \in M_d(K)$ une matrice et $[A.]$, l'application de multiplication a gauche par A :

$$[A.] : M \in M_d(K) \mapsto A.M \in M_d(K).$$

1. Montrer que $[A.]$ est lineaire.
2. Montrer que $[A.]$ est inversible ssi A est inversible.
3. Montrer que

$$A^2 = \mathbf{0}_d \text{ ssi } \text{Im}([A.]) \subset \text{ker}([A.])$$

(pour une direction remarquer que $A \in \text{Im}([A.])$).

4. On considere l'application

$$A \in M_d(K) \mapsto [A.] \in \text{End}(M_d(K)).$$

Montrer qu'elle est lineaire et injective.

5. Est ce que cette application est un morphisme d'algebre ?
6. Pour $d = 2$, calculer la matrice de $[A.]$ dans la base canonique de $M_2(K)$ (formee des matrices elementaires dans l'ordre ci-dessous)

$$\mathcal{B}_{22}^0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}.$$

Polynomes sur un corps (suite)

Soit A un anneau commutatif. On a introduit dans la serie precedente la A -algebre des polynomes a coefficients dans A

$$A[X] = \left\{ \sum_{0 \leq n \leq D} a_n X^n, a_n \in A \right\}.$$

Définition 1. Soit $P(X)$ un polynome. Si P est non nul, son degré est défini comme

$$\deg(P) = \sup\{n \geq 0, a_n \neq 0\}.$$

Ainsi si $\deg(P) = d$ on a $a_d \neq 0$ et $\forall n > d, a_n = 0$.

Le coefficient d'indice le degré a_d s'appelle le coefficient dominant de P .

Si $P(X) = 0_A \cdot X^0 = 0_{A[X]}$ on pose $\deg(P) = -\infty$

Exercice 9. Soient P et Q des polynomes non-nuls.

1. Montrer que $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. Montrer que cette inégalité peut être stricte.
2. Montrer que $\deg(P \cdot Q) \leq \deg(P) + \deg(Q)$.
3. Montrer que si A est intègre alors $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. Montrer que ces résultats restent vrais si P ou Q est nul.
5. Montrer que si A est intègre alors $A[X]$ est intègre.

On suppose que $A = K$ est un corps (en particulier K est intègre et donc $K[X]$ également). On va montrer qu'il existe sur $A[X]$ une notion de division euclidienne.

Exercice 10. Soit $Q \in K[X] - \{0\}$ un polynome non-nul et P un polynome quelconque.

On veut montrer qu'il existe $R, S \in K[X]$ tels que

$$P = Q \cdot S + R$$

avec $\deg R < \deg Q$, $\deg P = \deg Q + \deg S$ et que R et S sont uniques. R s'appelle le reste de la division euclidienne de P par Q et S est le quotient.

1. On commence par l'unicité. On suppose que

$$P = Q \cdot S + R = Q \cdot S' + R'$$

avec $\deg R, \deg R' < \deg Q$.

Montrer que $R - R'$ est divisible par Q puis que $R = R'$ (utiliser le (2) de l'exercice précédent) et enfin que $S = S'$ (utiliser le (5) de l'exercice précédent).

2. On passe à l'existence. Soit $d = \deg Q$. Montrer que si $\deg P < d$ alors R, S existent et donner leur valeurs.
3. On procède par récurrence sur $p := \deg P$. On peut supposer que $p \geq d$. On note a_d le coefficient dominant de Q ($Q = a_d \cdot X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots$) et b_p celui de P ($P = b_p \cdot X^p + b_{p-1} X^{p-1} + \dots$).
Soit $P_1 = P - b_p a_d^{-1} Q \cdot X^{p-d}$. Montrer que $\deg P_1 < p$.

4. En utilisant l'hypothese de recurrence montrer que R, S existent pour P .

Exercice 11. On va utiliser le resultat precedent pour donner la forme generale des ideaux de $K[X]$. On rappelle qu'un ideal $I \subset K[X]$ est un sous-groupe du groupe additif $(K[X], +)$ tel que

$$\forall Q \in I, S \in K[X], \implies Q.S \in I$$

Soit $I \neq \{0\}$ un ideal non-nul de $K[X]$ et $Q \in I - \{0\}$ un polynome non-nul tel que $\deg Q$ est minimal parmi les degres tous les polynomes non-nuls de I :

$$\deg Q = \min(\deg P, P \in I - \{0\}).$$

On va montrer que

$$I = K[X].Q = \{S.Q, S \in K[X]\} \subset K[X]$$

est l'ensemble des multiples de Q .

1. Soit $P \in I$ et R, S le reste et quotient de la division euclidienne de P par Q :

$$P = Q.S + R, \deg R < \deg Q.$$

Montrer que $R \in I$.

2. En deduire que P est un multiple de Q et conclure.

Remarque. Comparer avec la classification des ideaux de \mathbb{Z}