

Série 10

Tous les exercices seront corrigés (ceux concernant les polynômes le seront dans le poly).

Vous êtes fortement encouragés à essayer de résoudre (éventuellement à plusieurs) l'exercice (★) et à rendre votre solution (éventuellement à plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (éventuellement tapé en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative à cette série.

Exercice 1. Soit V un K -ev de dimension finie et V^* son dual. Soit $U \subset V$ un SEV, son sous-espace annihilateur (ou orthogonal) est le sous-espace de V^* défini par

$$U^\perp := \{l \in V^*, \forall u \in U, l(u) = 0_K\} \subset V^*.$$

Reciproquement si $U^* \subset V^*$ est un SEV de l'espace dual, son orthogonal $U^{*,\perp}$ dans V est le SEV défini par

$$U^{*,\perp} = \{v \in V, \forall l \in U^*, l(v) = 0\} \subset V.$$

1. Montrer que $U^{\perp,\perp} = U$.
2. Soient $U, U' \subset V$ des SEV. Montrer que

$$U^\perp \subset U'^\perp \implies U \supset U'.$$

3. Soit V^{**} le bi-dual de V et

$$(U^*)^\perp = \{\ell \in V^{**}, \forall l \in U^*, \ell(l) = 0_K\} \subset V^{**}.$$

Montrer que si on identifie V à V^{**} via l'application $v \rightarrow \text{eval}_v : l \mapsto l(v)$ alors

$$(U^*)^\perp = U^{*,\perp}.$$

Exercice 2. Soient $\varphi : U \mapsto V$ et $\psi : V \mapsto W$.

1. Montrer que $\text{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \text{rg}(\psi)$ (on pourra comparer deux images).
2. Montrer que $\text{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \text{rg}(\varphi)$ (on pourra comparer deux noyaux).
3. Montrer que $\text{rg}(\varphi^* \circ \psi^*) \leq \text{rg}(\varphi)$.

Coefficients d'applications lineaires

Soit $d \geq 1$, l'espace vectoriel produit K^d est muni d'une base dite base canonique qu'on notera

$$\mathcal{B}_d^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_d^0 = (0, 0, \dots, 1)\}.$$

Par exemple pour $d = 3$

$$\mathcal{B}_3^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3^0 = (0, 0, 1)\}.$$

Exercice 3. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^3$ definie par

$$\varphi(x, y) = (-x + 3y, 2x - y, x + y).$$

1. Donner une famille generatrice de $\text{Im}(\varphi)$ puis donner une base de $\text{Im}(\varphi)$.
2. Donner une representation cartesienne de $\text{Im}(\varphi)$ avec un nombre minimal d'equations.
3. Donner une representation cartesienne de $\text{ker}(\varphi)$ avec un nombre minimal d'equations. Trouver une base de $\text{ker}(\varphi)$.
4. Montrer que les coefficients de φ relativement a $\mathcal{B}_{\mathcal{B}_3^0, \mathcal{B}_2^0}$ sont donnes par

$$\begin{pmatrix} -1 & ? \\ ? & -1 \\ 1 & ? \end{pmatrix}$$

5. Calculer directement $\varphi(3, 3)$. Retrouver ce resultat a l'aide de la formule calculant l'image d'un vecteur par une application lineaire en fonction des coefficients de celle-ci.

Exercice 4. Soient les applications lineaires suivantes sur les polynomes :

$$\alpha : \begin{matrix} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \mapsto & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ P(t) & \mapsto & 2P'(t) - P(t) \end{matrix}, \quad \beta : \begin{matrix} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \mapsto & \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \\ P(t) & \mapsto & P'(t) \end{matrix}.$$

1. Determiner le rang de α , donner une base de son noyau et de son image.
Meme question pour β et $\beta \circ \alpha$ (on representera un polynome sous la forme $at^3 + bt^2 + ct + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$).
2. Determiner la matrice de α par rapport a la base canonique $\{1, t, t^2, t^3\}$.
3. Meme question pour β par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ et $\{1, t, t^2\}$.
4. Meme question pour $\beta \circ \alpha$ par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ et $\{1, t, t^2\}$.

Exercice 5. Soit $V = K^2$ et

$$\mathcal{B}^0 = \mathcal{B}_2^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0), \mathbf{e}_2^0 = (0, 1)\}$$

la base canonique.

1. Déterminer pour quelles valeurs de $\text{car}(K)$ la famille

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 2), \mathbf{e}_2 = (3, 1)\}$$

est une base de V . On suppose pour toute la suite que la caractéristique de K est telle que \mathcal{B} est bien une base (on peut même supposer que $\text{car}(K) = 0$ si on préfère).

2. Exprimer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ comme CL de \mathbf{e}_1^0 et de \mathbf{e}_2^0 . Exprimer $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0$ comme CL de \mathbf{e}_1 et de \mathbf{e}_2 .
3. On considère l'espace vectoriel des applications linéaires de V vers V

$$\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V).$$

Suivant qu'on choisit \mathcal{B}^0 ou \mathcal{B} comme bases de V vu comme espace de départ ou comme d'arrivée, on obtient quatre bases possibles pour $\text{Hom}_K(V, V)$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}, \mathcal{B}_{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}}, \mathcal{B}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^0}.$$

4. Soit

$$\varphi = \text{Id}_V : v \mapsto v$$

l'application identité de V . Calculer les coefficients $(m_{ij}(\text{Id}_V))_{i,j \leq 2}$ de Id_V relativement aux 4 bases ci-dessus. (aucun ne demande trop de calculs au moins une fois qu'on a fait la question 2).

5. Soit $\psi : V \mapsto V$ l'unique application linéaire telle que

$$\psi(1, 2) = (2, 4), \quad \psi(3, 1) = (-3, -1).$$

Calculer $\psi(1, 0)$ et $\psi(0, 1)$ comme CL des éléments de \mathcal{B}^0 et comme CL des éléments de \mathcal{B} .

6. Calculer les coefficients de ψ relativement aux bases

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}, \mathcal{B}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^0}.$$

7. Calculer $\psi(x, y)$ pour tout $(x, y) \in K^2$ (par exemple en utilisant la formule pour l'image d'un vecteur en fonction des coefficients de l'application linéaire relativement à des bases convenables).

8. Calculer les coefficients de $\psi^2 = \psi \circ \psi$ relativement aux bases

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}, \mathcal{B}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^0}.$$

Rangs de matrices

Le rang d'une matrice M de taille $d' \times d$ est le rang de l'espace vectoriel des matrices colonnes extraites de M :

$$\text{rang}(M) = \dim \text{Vect}(\{\text{col}_i(M) = (m_{ij})_{i \leq d'}, j = 1, \dots, d\}).$$

Si $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi)$ alors

$$\text{rang}(M) = \text{rang}(\varphi).$$

Exercice 6. Déterminer le rang des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M.N$$

en fonction de la caractéristique du corps K .

Exercice 7. Soient $M \in M_{d' \times d'}(K)$ et $N \in M_{d' \times d}(K)$.

1. Montrer que

$$\text{rg}(M.N) \leq \text{rg}(M), \text{rg}(M.N) \leq \text{rg}(N).$$

Exercice 8. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application linéaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. Que vaut $\varphi(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4$?
2. Trouver une base du noyau et de l'image de φ .
3. À partir de ces bases construire des bases de \mathbb{Q}^4 et de \mathbb{Q}^3 telles que la matrice de φ exprimée dans ces bases vaut $I_{3 \times 4}(r) = \begin{pmatrix} \text{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r = \text{rg}(\varphi)$ (on pourra relire la preuve du Thm. Noyau-Image).

Produits de matrices

Exercice 9. Effectuer tous les produits possibles des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}, B = (1 \ 8 \ 5), C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit $M = (m_{ij}) \in M_{d'' \times d'}(K)$ et $N = (n_{kl}) \in M_{d' \times d}(K)$ et $M.N \in M_{d'' \times d}(K)$ le produit. On note ${}^t M = (m_{ji}^*)_{j \leq d', i \leq d} \in M_{d' \times d''}(K)$ la matrice (transposée) de taille $d' \times d''$ définie par que

$$m_{ji}^* = m_{ij}$$

; on définit même ${}^t N \in M_{d \times d'}(K)$ et ${}^t(M.N) \in M_{d \times d''}(K)$.

1. Montrer par un calcul direct que

$${}^t(M.N) = {}^t N {}^t M.$$

Exercice 11. Soit K un corps et pour $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{22}^0 := \{E_{ij}, i, j \leq 2\} \subset M_2(K)$$

l'ensemble des matrices élémentaires de taille 2 (on rappelle que c'est une base de $M_2(K)$: on l'appelle la base canonique de $M_2(K)$).

On définit les SEVs suivants de $M_2(K)$:

$$D_2(K) = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}) \text{ et } T_2(K) = \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22}).$$

1. Quelles sont les dimensions de ces SEVs ? Donner la forme générale d'une matrice dans ces deux SEVs.
2. Montrer que ces SEVs sont stables par produits et sont en fait des sous-algèbres de $M_2(K)$.
3. Lesquelles de ces sous-algèbres sont commutatives ?

Exercice 12 (*). On considère la matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1. Calculer $M^2 = M.M$, $M^3 = M.M.M$, et trouver $a_0, a_1, a_2 \in K$ tels que

$$\mathbf{0}_3 = M^3 + a_2.M^2 + a_1.M + a_0.\text{Id}_{3 \times 3}.$$

2. Montrer (par récurrence) que pour tout $k \geq 3$, M^k est combinaison linéaire de $\{M^2, M, \text{Id}_3\}$ (on pourra aussi faire une division euclidienne de polynômes si on connaît et qu'on préfère).
3. On note

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[M] &= \text{Vect}(\text{Id}_3, M, M^2, \dots, M^k, \dots) \\ &= \{a_0.\text{Id}_3 + a_1.M + \dots + a_d.M^d, d \geq 1, a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\} \subset M_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

l'espace vectoriel des matrices engendré par toutes les puissances de M (on pose $M^0 = \text{Id}_3$).

(a) Montrer que

$$\mathbb{R}[M] = \text{Vect}(\text{Id}_3, M, M^2)$$

Quelle est la dimension de $\mathbb{R}[M]$?

(b) Montrer que $\mathbb{R}[M]$ est stable par produit et que c'est un sous-anneau de $M_3(\mathbb{R})$.

Polynomes sur un corps

Ces exercices suivant visent a vous familiariser avec $A[X]$, l'anneau de polynomes sur un anneau commutatif general et ses diverses proprietes. Le cas le plus interessant pour nous sera celui ou $A = K$ est un corps. Ces exercices seront corrige dans une appendice au cours.

Dans cette feuille on definit cet anneau de maniere rigoureuse.

Les polynomes sont des suites

Soit A un anneau commutatif et soit

$$A^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n \geq 0}, a_n \in A\}.$$

l'ensemble des suites a valeurs dans A (ou encore l'ensemble des fonctions de \mathbb{N} a valeurs dans A : $(a_n)_{n \geq 0} : n \mapsto a_n$).

L'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ a une structure de A -module pour l'addition terme a terme

$$(a_n)_{n \geq 0} + (b_n)_{n \geq 0} = (a_n + b_n)_{n \geq 0}$$

dont l'element neutre est la suite identiquement nulle

$$\underline{0}_A = (0_A, \dots, 0_A, \dots)$$

et la multiplication par les scalaires est donnee pour $a \in A$ par

$$a \cdot (a_n)_{n \geq 0} = (a \cdot a_n)_{n \geq 0}.$$

Définition 1. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite a valeurs dans A . Le support de cette suite est defini comme etant l'ensemble des indices ou la suite prend une valeur non-nulle

$$\text{supp}((a_n)_{n \geq 0}) = \{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0_A\} \subset \mathbb{N}.$$

L'ensemble des polynomes $A[X]$ est construit algébriquement de la manière suivante :

Définition 2. Un polynome P a coefficient dans A est une suite $P = (a_n)_{n \geq 0}$ de support fini : telle que

$$\text{supp}(P) = \{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0_A\} \text{ est fini.}$$

Le n -ième terme de cette suite a_n est le coefficient d'ordre n de P ; on le note également $c_n(P)$.

On définit le degré de P comme étant le plus grand indice non-nul :

$$\text{deg } P = \max\{n \geq 0, a_n \neq 0_A\}.$$

Si $P = \underline{0}_A$ de sorte que $\{n \geq 0, a_n \neq 0_A\} = \emptyset$ on pose

$$\text{deg}(\underline{0}_A) = -\infty.$$

Si $d = \text{deg}(P)$ le coefficient $a_d = c_d(P)$ est le coefficient dominant de P .

L'ensemble des polynomes à coefficients dans A est le sous-ensemble $A_f^{\mathbb{N}} \subset A^{\mathbb{N}}$ formé des suites à support fini ; on le note

$$A_f^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n \geq 0}, a_n \in A, |\text{supp}((a_n)_{n \geq 0})| < \infty\}.$$

Exercice 13. Montrer que l'ensemble $A_f^{\mathbb{N}}$ est un sous- A module de $A^{\mathbb{N}}$ pour l'addition et la multiplication par les scalaires sur l'espace des suites à valeurs dans A .

Pour $m \geq 0$, le monome unitaire de degré m , que l'on note X^m , est l'élément de $A_f^{\mathbb{N}}$ défini par

$$X^m : n \mapsto \delta_{A,m=n} \begin{cases} 1_A & \text{si } n = m, \\ 0_A & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

On note

$$\mathcal{B}^0 = \{X^m, m \geq 0\}$$

l'ensemble des monomes unitaires.

Cette famille est une famille génératrice du module des polynomes : soit $P = (a_n)_{n \geq 0} \in A_f^{\mathbb{N}}$ alors

$$P = \sum_{m=0}^{\text{deg } P} a_m \cdot X^m$$

et cette écriture en combinaison linéaire de monomes est unique.

Structure d'anneau

On associe à tout polynôme P une fonction polynomiale

$$P_A : a \in A \mapsto \sum_{m=0}^{\deg P} a_m \cdot a^m$$

(par convention on pose $a^0 = 1_A$).

Exercice 14. Soient P, Q deux polynômes :

$$P = \sum_{m \leq \deg P} a_m \cdot X^m, \quad Q = \sum_{n \geq \deg Q} b_n \cdot X^n.$$

1. Montrer que le produit des deux fonctions polynomiales

$$P_A \cdot Q_A : a \mapsto P_A(a) \cdot Q_A(a)$$

est encore une fonction polynomiale :

$$P_A \cdot Q_A = (P \cdot Q)_A$$

avec

$$P \cdot Q = \sum_{l \geq 0} c_l \cdot X^l \text{ et } c_l = \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m+n=l}} a_m \cdot b_n.$$

(dans la preuve faite bien attention d'utiliser la commutativité de A).

2. Montrer que si P et Q sont non-nuls alors $\deg P \cdot Q \leq \deg P + \deg Q$ et que si A est intègre alors $\deg P \cdot Q = \deg P + \deg Q$.
3. Montrer que ces formules concernant le degré restent vraies si P ou Q est le polynôme nul.

Exercice 15. Compte-tenu de cela on définit sur $A_f^{\mathbb{N}}$ une multiplication interne

$$\bullet \bullet \bullet : \begin{array}{l} A_f^{\mathbb{N}} \times A_f^{\mathbb{N}} \mapsto A_f^{\mathbb{N}} \\ (P, Q) \mapsto P \cdot Q \end{array}$$

avec

$$P \cdot Q = \sum_{l \geq 0} c_l \cdot X^l \text{ et } c_l = \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m+n=l}} a_m \cdot b_n.$$

1. Montrer que cette loi de multiplication interne $\bullet \bullet \bullet$ est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et qu'elle donne à $A_f^{\mathbb{N}}$ une structure d'anneau commutatif dont l'unité est le monôme X^0 .

2. Montrer que cette loi est associative par rapport a la multiplication par les scalaires et qu'elle fait de $A_f^{\mathbb{N}}$ une A -algebre.
3. Montrer que l'application

$$a \in A \mapsto a.X^0 \in A[X]$$

est un morphisme d'anneaux injectif dont l'image est l'anneau des *polynomes constants*. Cela permet de voir A comme un sous-anneau de $A[X]$.

4. Soit B une A -algebre (pas forcément commutative) et contenant A (ie. A commute avec tous les elements de B). Soit $b \in B$. Montrer que l'application

On note cette A -algebre $A[X]$ et on l'appelle l'anneau des polynomes a coefficients dans A .

Remarque. On ne peut definir $A[X]$ simplement comme l'anneau des fonctions polynomiales sur A car la representation d'une fonction polynomiale n'est alors pas forcément unique (meme si A est tres "gentil") : si $A = \mathbb{F}_p$ est le corps fini a p elements les fonction polynomiales associees au polynome nul $\underline{0}_A$ et au polynome $X^p - X$ sont identiques !

L'avantage de notre formulation est qu'on obtient alors des fonctions polynomiales sur toute A -algebre : si B est une A -algebre (on note $a * b$ la mutiplication par les scalaires des elements de B), on definit alors pour tout polynome $P \in A[X]$ la fonction polynomiale

$$P_B : b \in B \mapsto P_B(b) = \sum_{m \leq \deg P} a_m * b^m.$$

Exercice 16. Montrer que pour tout $b \in B$, application

$$\text{eval}_b : P = \sum_{m \leq \deg P} a_m \cdot X^m \mapsto P_B(b) := \sum_{m \leq \deg P} a_m * b^m$$

est un morphisme d'algebres de $A[X]$ vers B .