

FREE YOUR MIND

THE MATRIX

Operations Elementaires sur une matrice

DÉFINITION 10.1. *Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d' \times d}(K)$ vers $M_{d' \times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \dots, d'\}$ et $\lambda \in K^\times$ et $\mu \in K$*

(I) *Transposition: Echanger deux lignes $i \neq j \leq d'$ de M :*

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

(II) *Dilatation: Multiplier la i -eme ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$:*

$$L_i \rightarrow \lambda.L_i.$$

(III) *Combinaison Lineaire: Additionner a la ligne i un multiple scalaire de la la j -ieme ligne pour $i \neq j$: $\mu \in K$*

$$L_i \rightarrow L_i + \mu L_j$$

Ces transformations sont appellees transformations elementaires.

On les note respectivement T_{ij} , $D_{i,\lambda}$ et $Cl_{ij,\mu}$

PROPOSITION 10.2. Les trois opérations élémentaires sont obtenues par multiplication à gauche de M par des matrices convenables: pour $1 \leq i \neq j \leq d'$

- (I) $T_{ij, \bullet} : M \mapsto T_{ij} \cdot M$
- (II) $D_{i, \lambda, \bullet} : M \mapsto D_{i, \lambda} \cdot M$
- (III) $Cl_{ij, \mu, \bullet} : M \mapsto Cl_{ij, \mu} \cdot M.$

ou les matrices carrées $T_{ij}, D_{i, \lambda}, Cl_{ij, \mu} \in M_{d'}(K)$ sont définies par:

$$T_{ij} = \text{Id}_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

$$D_{i, \lambda} = \text{Id}_{d'} + (\lambda - 1) \cdot E_{ii}, \quad \lambda \neq 0$$

$$Cl_{ij, \mu} = \text{Id}_{d'} + \mu \cdot E_{ij}, \quad i \neq j \text{ ou } \mu \neq -1 \text{ si } i = j.$$

DÉFINITION 10.2. Les matrices

$$T_{ij}, D_{i, \lambda}, \lambda \neq 0, Cl_{ij, \mu}$$

pour $i, j \leq d', \lambda \neq 0$, et si $i = j, \mu \neq -1$ sont appelées matrices de transformations élémentaires.

 THE WARNING 

Ne pas confondre avec matrices élémentaires

DÉFINITION 10.3. On dit que N est ligne-équivalente à M ssi il existe une suite de transformations élémentaires qui transforme M en N .

– De manière équivalente, N est ligne-équivalente à M ssi il existe une suite finie T_1, \dots, T_n de matrices des transformations élémentaires telle que N est obtenue à partir de M par multiplications à gauche par cette suite de matrices:

$$N = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot M.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et ligne-équivalente $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

PROPOSITION 10.3. *La relation être "ligne-équivalente" est une relation d'équivalence sur $M_{d' \times d}(K)$.
– De plus deux matrices M, N ligne-équivalentes sont équivalentes au sens de la notion d'équivalence de deux matrices de la Définition 9.10.*

COROLLAIRE. *Si M et N sont lignes équivalentes alors*

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(N).$$

PROPOSITION 10.4. *Si $N \in M_{d' \times d}(K)$ est ligne-equivalente a M alors toute ligne de N est combinaison lineaire des lignes de M :*

$$\forall i \leq d', \text{Lig}_i(N) \in \langle \text{Lig}_1(M), \dots, \text{Lig}_{d'}(M) \rangle \subset K^d$$

et inversement les lignes de M sont combinaisons lineaires des lignes de N . En particulier les SEV engendres par les lignes de M et de N sont les memes

$$\langle \text{Lig}_1(M), \dots, \text{Lig}_{d'}(M) \rangle = \langle \text{Lig}_1(N), \dots, \text{Lig}_{d'}(N) \rangle \subset K^d$$

Echelonnage

DÉFINITION 10.4. Une matrice $M = (m_{ij}) \in M_{d' \times d}(K)$ est échelonnée si elle est nulle ou bien si

- (1) Il existe $1 \leq r \leq d$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq d$ tels que
- Pour la ligne L_1 , le premier terme non-nul est le j_1 -ième: on a $m_{1j} = 0$ pour tout $j < j_1$ et $m_{1j_1} \neq 0$,
 - Pour la ligne L_2 , le premier terme non-nul est le j_2 -ième: on a $m_{2j} = 0$ pour tout $j < j_2$ et $m_{2j_2} \neq 0$,
 - \vdots
 - Pour la ligne L_r , le premier terme non-nul est le j_r -ième: on a $m_{rj} = 0$ pour tout $j < j_r$ et $m_{rj_r} \neq 0$
- (2) les lignes $L_{r+1}, \dots, L_{d'}$ sont toutes nulles.

Si M est non-nulle les $j_1 < \dots < j_r$ sont appelés les échelons de M et les m_{ij_i} , $1 \leq i \leq r$ sont les pivots de M .

$$\begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & m_{24} & \cdots & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{35} & \cdots & \cdots \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = 3$$

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = 4$$

$$d_3 = 5.$$

DÉFINITION 10.5. Une matrice est echelonnee reduite si le seul coefficient non-nul d'une colonne contenant un pivot est le pivot lui-meme et il vaut 1:

– pour tout $i = 1, \dots, r$

$$m_{ij_i} = 1.$$

– Pour tout $i = 1, \dots, r$ et tout $1 \leq i' \neq i \leq d'$, on a

$$m_{i'j_i} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & m_{13} & 0 & 0 & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 10.1 (Gauss). *Toute matrice est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite.*

THÉORÈME 10.2 (Gauss). *Deux matrices ligne-équivalentes et échelonnées réduites sont égales.*

COROLLAIRE 10.1. *(Unicité de la forme échelonnée réduite) Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$ une matrice alors M est ligne-équivalente à une unique matrice échelonnée réduite (qu'on appelle la forme échelonnée réduite de M).*

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sont toutes réduites et pas ligne équivalente

Calcul du Rang

PROPOSITION 10.5. *Si M et N sont lignes équivalentes*

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(N).$$

PROPOSITION 10.6. *Si R est échelonnée avec r échelons alors*

$$\text{rg}(R) = r.$$

Extraction d'une base d'une
famille génératrice

PROPOSITION 10.8 (Description matricielle d'une base d'un SEV). Soit $M \in M_{l \times d}(K)$ la matrice dont les l lignes sont formées des vecteurs lignes L_i , $i \leq l$. Soit R la matrice échelonnée (réduite) associée à M et

$$L'_i = \text{Lig}_i(R), \quad i \leq l$$

l'ensemble des lignes de R alors si R possède r échelons on a

$$\dim W = r$$

et les vecteurs de V correspondants aux r premières lignes

$$\mathcal{B}_W = \{w'_i = \text{Lig}_{\mathcal{B}}^{-1}(L'_i), \quad i \leq r\}$$

forment une base de W (et les $l - r$ autres vecteurs sont nuls).

On peut alors compléter \mathcal{B}_W en une base \mathcal{B} de V en prenant

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \sqcup \{e_j, \quad j \text{ n'est pas un échelon de } R\}.$$

$\{w'_1, \dots, w'_r\} \cup \{e_j \mid j=1, \dots, d \text{ } j \neq j_i\}$
est une base de V .

Inversions de Matrices

PROPOSITION 10.7 (Critere d'inversibilite par operations elementaires). Soit $M \in M_d(K)$ une matrice carree alors M est inversible ssi M est ligne equivalente a la matrice identite Id_d .

$$M \in GL_d(K) \iff$$

$$M = T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_1 \cdot \text{Id}_d$$

THÉORÈME 10.3. *Le groupe linéaire $GL_d(K)$ est engendré par les matrices des transformations élémentaires*

$$T_{ij}, D_{i,\lambda}, Cl_{ij,\mu}, \quad i, j \leq d, \quad \lambda, \mu \in K, \quad \lambda \neq 0, \quad \text{et si } i = j, \quad \mu \neq -1.$$

En d'autres termes (puisque l'ensemble des matrices de transformations élémentaires est stable par inverse) toute matrice $M \in GL_d(K)$ s'écrit comme un produit fini de ces matrices.

Calcul de l'Inverse: $M \in GL_d(\mathbb{K})$

$$\text{Id}_d = T_n \cdots T_2 T_1 M$$

$$M^{-1} = T_n \cdots T_1$$

Resolution de Systemes lineaires

$$\varphi: V \rightarrow W$$

$w \in W$

$$\text{Sol}_{\varphi}(w) = \{v \in V \mid \varphi(v) = w\}$$
$$= \varphi^{(-1)}(\{w\})$$

THÉORÈME 10.5 (Résolution d'équations dans les espaces vectoriels). Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Pour tout $w \in W$, on pose

$$\text{Sol}_\varphi(w) = \varphi^{-1}(\{w\}) = \{v \in V, \varphi(v) = w\} \subset V$$

la preimage de w par φ . En particulier $\text{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_W) = \ker \varphi$. Alors $\text{Sol}_\varphi(w)$ est

- soit $w \notin \varphi(V)$ et $\text{Sol}_\varphi(w)$ est l'ensemble vide,
- soit $w \in \varphi(V)$ et il existe $v^0 \in V$ tel que $\varphi(v^0) = w$ et alors

$$\text{Sol}_\varphi(w) = v^0 + \text{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_d) = v^0 + \ker \varphi = \{v_0 + k, k \in \ker \varphi\}.$$

Codage matriciel: $\varphi: \underset{B}{V} \rightarrow \underset{B'}{W}$

$$M = (m_{ij}) = \text{mat}_{B', B}(\varphi)$$

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_d e_d \quad w = w_1 f_1 + \dots + w_{d'} f_{d'}$$

$$\varphi(v) \stackrel{?}{=} w \iff M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

T_n $T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

?

 T_n $T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$T_n.$

$$T_1 = \prod T_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \Pi_n \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \\ w_{r+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_r \\ w'_{r+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$w'_i = f_i(w_1, \dots, w_d)$$

$$w'_i = 0 \text{ si } i \geq r+1$$

$$\Leftrightarrow \text{Sol } \varphi(w) \neq \emptyset \text{ ssi}$$

$$* \forall i \geq r+1 \quad l_i(w_1, \dots, w_d) = 0$$

* est une représentation cartésienne
de $\varphi(V)$ (relative à B)

DÉFINITION 10.7. Les inconnues v_{j_i} pour j_i , $1 \leq i \leq r$ étant un echelon sont appelées inconnues principales du système. Les inconnues v_j pour $j \leq d$ qui n'est pas un echelon sont appelées inconnues libres du système.

En pratique: si w est tel que

$$l_{r+1}(w) = \dots = l_d(w) = 0 \iff w \in \mathcal{P}(V)$$

alors on trouve toute les solution de

$\mathcal{P}(V) = w$ en donnant des valeurs arbitraires aux v_j $j \neq j_i$ et alors les

inconnues principales v_{d_i} seront déterminées
de manière unique.

$$v_{d_i} + \sum_{d \neq d_i, \dots, d_r} x_{i,d} v_d = w_i$$

Les Colonnes

$$C_i = C_i(M) = \text{Col}_i(M) = (m_{ij})_{i \leq d'}$$

DÉFINITION 10.8. *Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d' \times d}(K)$ vers $M_{d' \times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \dots, d\}$ et $\lambda \in K^\times$ et $\mu \in K$*

(I) *Transposition: Echanger deux colonnes $i \neq j \leq d'$ de M :*

$$C_i \longleftrightarrow C_j$$

(II) *Dilatation: Multiplier la i -eme colonne par un scalaire $\lambda \neq 0$:*

$$C_i \rightarrow \lambda.C_i.$$

(III) *Combinaison Lineaire: Additionner a la colonne i un multiple scalaire de la j -ieme colonne pour $i \neq j$: $\mu \in K$*

$$C_i \rightarrow C_i + \mu C_j$$

Ces transformations sont appelées transformations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

PROPOSITION 10.9. *Une operation elementaire sur les colonnes d'une matrice M equivaut a une operation elementaire sur les lignes de $M' = {}^t M$.*

Une telle transformation est donnee par multiplication par la droite

$$M \mapsto M \cdot {}^t T_l$$

par la transposee d'une matrice de transformation elementaire sur les lignes T_l en composant les operations suivantes

$$M \mapsto {}^t M \mapsto T_l \cdot {}^t M \mapsto {}^t T_l \cdot {}^t M = M \cdot {}^t T_l = M \cdot T_c.$$

Il en resulte que des transformations sont bijectives et lineaires.

DÉFINITION 10.9. *On dit que N est colonne-équivalente à M ssi il existe une suite de transformations élémentaires qui transforme M en N .*

– *De manière équivalente, N est colonne-équivalente à M ssi il existe une suite finie de matrices de transformations élémentaires (sur les colonnes) telle que N est obtenue à partir de M par multiplications à droite par cette suite de matrices.*

PROPOSITION 10.10. *La relation être "colonne-équivalente" est une relation d'équivalence sur $M_{d' \times d}(K)$.*

– *De plus deux matrices M, N colonnes-équivalentes sont équivalentes au sens de la notion d'équivalence de deux matrices de la Définition 9.10. En particulier elles ont même rang.*

The image is a title card for the movie 'The Matrix'. It features a dense, green digital rain effect, with vertical lines of code falling from the top. The text 'THE MATRIX' is centered in a white, serif font. The word 'THE' is smaller and positioned above 'MATRIX'. The background is a dark green, almost black, with the falling code creating a sense of depth and movement. The overall aesthetic is iconic and futuristic.

THE
MATRIX

Objectif: On veut définir

$$\Delta: V^d \longrightarrow K$$

- $\Delta(v_1, \dots, v_d) \neq 0$ ssi $\{v_1, \dots, v_d\}$ = base de V

- $\Delta(v_1, \dots, v_d) = 0$ ssi $\{v_1, \dots, v_d\}$ est liée

Δ est multilinéaire: $\Delta(v_1, \dots, v_d)$ est linéaire en chacune des variables v_1, \dots, v_d

DÉFINITION 11.1. Soit V un K -espace vectoriel, une forme bilinéaire sur V est une fonction de deux variables (sur $V \times V$) à valeurs dans K

$$\Lambda : \begin{array}{l} V \times V \mapsto K \\ (v_1, v_2) \mapsto \Lambda(v_1, v_2) \end{array}$$

telle que pour tout choix de vecteurs $(v_1, v_2) \in V \times V$ les applications d'une variable

$$\Lambda_{(1)} : v \in V \mapsto \Lambda(v, v_2) \in K \text{ et } \Lambda_{(2)} : v \in V \mapsto \Lambda(v_1, v) \in K$$

sont linéaires (ie. définissent des formes linéaires): $\forall \lambda \in K, v, v' \in V$

$$\Lambda(\lambda.v + v', v_2) = \lambda.\Lambda(v, v_2) + \Lambda(v', v_2),$$

$$\Lambda(v_1, \lambda.v + v') = \lambda.\Lambda(v_1, v) + \Lambda(v_1, v').$$

Example: $V = K^2$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

Product Scalars

$$V = K^d \quad v = (x_1, \dots, x_d) \quad v' = (x'_1, \dots, x'_d)$$
$$v \cdot v' = \langle v, v' \rangle =$$
$$(x_1, \dots, x_d) \cdot (x'_1, \dots, x'_d) = x_1 x'_1 + \dots + x_d x'_d$$

DÉFINITION 11.2. Soit V un K -espace vectoriel et $n \geq 1$ un entier. Une forme multilinéaire en n variables sur V est une application

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} V^n & \mapsto & K \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto & \Lambda(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

telle que pour tout choix de vecteurs $(v_j)_{j \leq n} \in V^n$ et tout indice $i = 1, \dots, n$, l'application en une variable obtenue à partir de Λ par "restriction à la i -ième composante"

$$\Lambda_{(i)} : v \in V \mapsto \Lambda(v_1, \dots, v, \dots, v_n) \in K$$

est linéaire:

$$\Lambda(v_1, \dots, \lambda.v + v', \dots, v_n) = \lambda.\Lambda(v_1, \dots, v, \dots, v_n) + \Lambda(v_1, \dots, v', \dots, v_n).$$

les n fonctions

$$v \in V \mapsto \Lambda(v, v_2, \dots, v_n) \in K$$

$$v \in V \mapsto \Lambda(v_1, v, \dots, v_n) \in K$$

⋮

$$v \in V \mapsto \Lambda(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n) \in K$$

$$v \in V \mapsto \Lambda(v_1, \dots, v_{n-1}, v) \in K.$$

sont linéaires.

Tenseurs purs : $l_1, \dots, l_n \in V^*$

$$l_1 \otimes l_2 \otimes \dots \otimes l_n : (v_1, \dots, v_n) \in V^n \rightarrow$$

$$l_1(v_1) \cdot l_2(v_2) \cdot \dots \cdot l_n(v_n)$$

Comme les l_i sont linéaire

$l_1 \otimes \dots \otimes l_n$ est linéaire en chaque variable v_i

$$l_1 \otimes \otimes l_n(v, v_2, \dots, v_n)$$

$$= l_1(v) \cdot l_2(v_2) \cdot \dots \cdot l_n(v_n)$$

$$= \left(\prod_{i=2}^n l_i(v_i) \right) \cdot l_1(v) \text{ est linéaire en } v,$$

PROPOSITION 11.1. L'ensemble $\text{Mult}^{(n)}(V) = (V^*)^{\otimes n}$ des formes multilinéaires en n variables est un K -espace vectoriel quand on le muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelle pour les fonctions de V^n à valeurs dans K : $\forall \Lambda, \Xi \in (V^*)^{\otimes n}$ et pour $\lambda \in K$, la fonction

$$(\lambda\Lambda + \Xi)(v_1, \dots, v_n) = \lambda\Lambda(v_1, \dots, v_n) + \Xi(v_1, \dots, v_n)$$

est encore une forme multilinéaire.

Exercice: faire le cas $n=2$.

Notations: $B = \text{base de } V$

$$B = \{e_1, \dots, e_d\} \quad B^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\} \subset V^*$$

$$\vec{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \{1, \dots, d\}^n \quad d_i \in \{1, \dots, d\} \\ l=1, \dots, n$$

en pose

$$e_{\vec{d}} := e_{d_1}^* \otimes e_{d_2}^* \otimes \dots \otimes e_{d_n}^* \in (V^*)^{\otimes n} \\ \text{Mult}^{(n)}(V)$$

$$v_1 = x_{11}e_1 + \dots + x_{1d}e_d$$

⋮

$$v_n = x_{n1}e_1 + \dots + x_{nd}e_d$$

$$\vec{j} = (1, 2, \dots, n) \quad (n \leq d)$$

$$e_{\vec{j}}^{\otimes}(v_1, \dots, v_n) = x_{11} \cdot x_{22} \cdot \dots \cdot x_{nn}$$

$$\vec{j} = (1, 1, \dots, 1)$$

$$e_{\vec{j}}^{\otimes}(v_1, \dots, v_n) = x_{11} \cdot x_{21} \cdot \dots \cdot x_{n1}$$

$$\vec{d} = (d_1, \dots, d_n) \quad \vec{d}' = (d'_1, \dots, d'_n) \quad d_i, d'_i \in \{1, \dots, d\}$$

$$\overset{*}{e}_{\vec{d}} = (e_{d_1}, e_{d_2}, \dots, e_{d_n})$$

$$= e_{d_1}^{*}(e_{d_1}') \cdot e_{d_2}^{*}(e_{d_2}') \cdot \dots \cdot e_{d_n}^{*}(e_{d_n}')$$

$$= \delta_{d_1=d_1'} \cdot \delta_{d_2=d_2'} \cdot \dots \cdot \delta_{d_n=d_n'} = \delta_{\vec{d}=\vec{d}'}$$

$$d=2 \quad \vec{\alpha} = (1, 2) \quad \vec{\beta} = (2, 1)$$
$$n=2 \quad \vec{\alpha} = (1, 2) \quad \vec{\beta} = (2, 1)$$

$$e_{(1,2)}^*(e_2, e_1) = e_1^1(e_2) e_2^2(e_1) = 0 \cdot 0$$

$$e_{1,2}^*(e_1, e_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

THÉORÈME 11.1 (Dimension et base de l'espace des formes multilinéaires). Soit $d = \dim V$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\} \subset V$ une base et $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ la base duale. Alors $V^{*\otimes n}$ est de dimension finie égale à d^n ; une base de $V^{*\otimes n}$ est donnée par l'ensemble des formes multilinéaires de la forme

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}}^* = \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \text{ quand } \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \text{ parcourent } \{1, \dots, d\}^n.$$

On note cette base

$$(\mathcal{B}^*)^{\otimes n} = \{\mathbf{e}_{\mathbf{j}}^* = \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, d\}^n\}.$$

Pour toute forme multilinéaire en n variables $\Lambda \in (V^*)^{\otimes n}$, on a la décomposition

$$(11.1.1) \quad \Lambda = \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, d\}^n} \dots \sum \Lambda(\mathbf{e}_{\mathbf{j}}) \mathbf{e}_{\mathbf{j}}^*$$

$$\mathbf{e}_{\vec{j}} = (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \quad \vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$$

Preuve on veut mq

$\left\{ e_{\vec{j}}^* \mid \vec{j} \in \{1, \dots, d\}^n \right\}$ est libre et
génératrice

Libre: Soient $\lambda_{\vec{j}} \in \{1, \dots, d\}^n$ des scalaires,

$$\text{tq } \Lambda = \sum_{\vec{j}} \dots \sum_{\vec{j}} \lambda_{\vec{j}} e_{\vec{j}}^* = \underline{\underline{0}}$$

Soit $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{1, \dots, d\}^n$

$$\Lambda(e_{\vec{\omega}}) = \Lambda(e_{\omega_1}, \dots, e_{\omega_n}) = 0$$

$$= \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{1, \dots, d\}^n} \sum_{\vec{\omega}} d_{\vec{\omega}} e_{\vec{\omega}}(e_{\omega_1}, \dots, e_{\omega_n})$$

$$= \sum_{\vec{\omega}} 1_{\vec{\omega} = \vec{\omega}} = d_{\vec{\omega}} \quad \{e_{\vec{\omega}}\} \text{ st libre.}$$

Generatrice: $n=1$ $\{e_j^{\otimes 1} \mid j=1 \dots d\}$ est une base

$$\text{et } l \in V^{\otimes 1} \quad l = \sum_{j=1}^d l(e_j) e_j^{\otimes 1}.$$

HR_n : $\{e_{\vec{j}} \mid \vec{j} \in \{1, \dots, d\}^n\} = \text{base de } V^{\otimes n}$

$$\text{et } \forall \Lambda \in V^{\otimes n} \quad \Lambda = \sum_{\vec{j}} \Lambda(e_{\vec{j}}) e_{\vec{j}}$$

On suppose que HR_n est connue ($+HR_1$)
et on va montrer que HR_{n+1} est vraie.

$$\Lambda \in V^{*\otimes n+1} \quad \forall v_{n+1} \in V$$

alors la fct

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longrightarrow \Lambda(v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1})$$

est multilinéaire en n variables

Par HR_n on sait que

$$\Lambda(\underbrace{\bullet}_{\substack{\uparrow \\ \in V^n}}, v_{n+1}) = \sum_{\vec{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, d\}^n} \sum \Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}, v_{n+1}) e_{\vec{j}}^{\bullet} (\bullet)$$

Pour chaque e_{j_1}, \dots, e_{j_n} la fct

$v_{n+1} \rightarrow \Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}, v_{n+1})$ est linéaire
en v_{n+1}

$$\Lambda(e_{\vec{d}}, v_{n+1}) = \sum_{d=1 \dots d} \Lambda(e_{\vec{d}}, e_d) e_d^*(v_{n+1})$$

$$\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$$

$$\Lambda(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) = \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in \{1, \dots, d\}^n} \sum_{d=1 \dots d} \Lambda(e_{\vec{d}}, e_d) \times$$

$$e_{d_1}^*(v_1) \cdot e_{d_2}^*(v_2) \cdot \dots \cdot e_{d_n}^*(v_n)$$

$$\cdot e_d^*(v_{n+1})$$

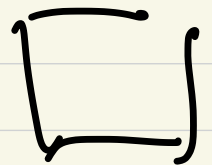
$$d = d_{n+1}$$

$$\Lambda(v_1, \dots, v_{n+1}) = \sum_{(j_1, \dots, j_{n+1}) \in \{1, \dots, d\}^{n+1}} \Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_{n+1}}).$$

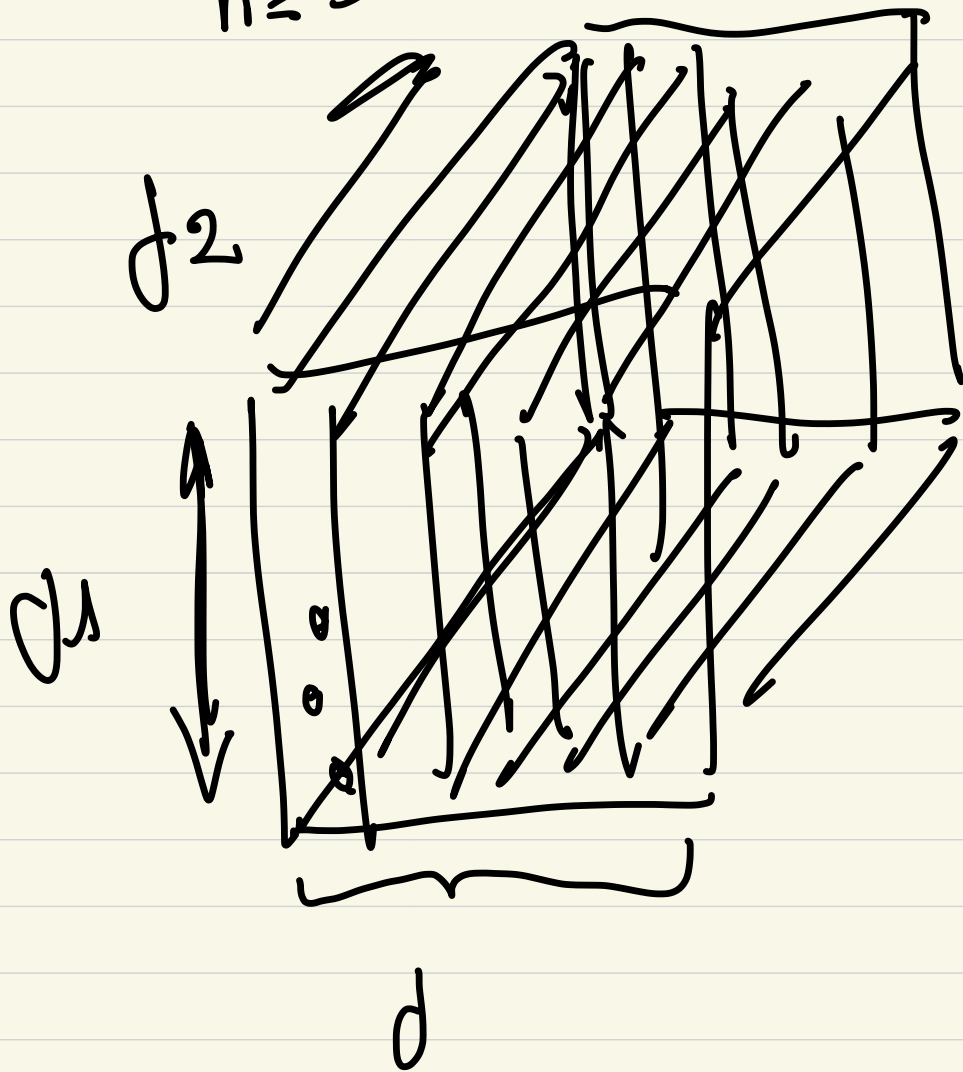
$$e_{j_1}^z(v_1) \cdot \dots \cdot e_{j_n}^z(v_n) e_{j_{n+1}}^z(v_{n+1})$$

$$e_{j_1}^z \otimes \dots \otimes e_{j_{n+1}}^z(v_1, \dots, v_{n+1})$$

$$\Lambda = \sum_{\vec{j} \in \{1, \dots, d\}^{n+1}} \Lambda(e_{\vec{j}}) e_{\vec{j}}^z$$



$n=3$



Formes Alternées

Rappel: On cherche $\Delta: V^d \rightarrow K$

Δ multilinéaire

\downarrow
 $\Delta(v_1, \dots, v_d) = 0$ ssi $\{v_1, \dots, v_d\}$ est liée.

en particulier la famille $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_d\}$ est liée

$\Rightarrow \forall v_1, v_3, \dots, v_d$

$$\Delta(v_1, v_2, v_3, \dots, v_d) = 0$$

sa reste vrai si (v_1, \dots, v_d) est tq
deux composantes sont les m

$$\exists i \neq j \text{ tq } v_i = v_j \Rightarrow \Delta(v_1, \dots, v_d) = 0$$

DÉFINITION 11.2. Une forme multilinéaire sur V en n variables $\Lambda \in \text{Mult}^{(n)}(V)$ est dite alternée si elle s'annule sur tout uplet de vecteurs $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ ayant deux composantes égales: si il existe $i \neq j$ tel que $v_i = v_j$ alors

$$\Lambda(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

On note $\text{Alt}^{(n)}(V)$ l'ensemble des formes alternées en n variables.

PROPOSITION 11.3. L'ensemble $\text{Alt}^{(n)}(V)$ des formes alternées en n variables est un SEV de $\text{Mult}^{(n)}(V)$.

$$= V^{\wedge n}$$

Exemple $V = K^2$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

$$\Lambda = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$(x, y) \wedge (x, y) = xy - yx = 0$$

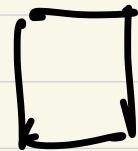
PROPOSITION 11.2. Soit Λ une forme alternée et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs qui est liée, alors $\Lambda(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Preuve: Soit Λ alternée et (v_1, \dots, v_n) qui est liée: il existe $v_i \neq 0$

$$v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j \quad \lambda_j \in K$$

Supposons que que ce soit $v_1 = \sum_{j=2}^n \lambda_j v_j$

$$\begin{aligned}\Lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \Lambda(\lambda_2 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, v_3, \dots, v_n) \\ &= \lambda_2 \Lambda(v_2, v_2, v_3, \dots, v_n) + \lambda_3 \Lambda(v_3, v_2, v_3, \dots, v_n) \\ &\quad + \dots + \lambda_n \Lambda(v_n, v_2, \dots, v_n) \\ &= 0 + \dots + 0 \text{ car } \Lambda \text{ est alternée.}\end{aligned}$$



PROPOSITION 11.4. Soit $\Lambda \in \text{Alt}^{(n)}(V)$ une forme alternée. On a

$$(11.2.1) \quad \Lambda = \sum_{\substack{\mathbf{j}=(j_i)_{i \leq n} \\ \text{les } j_i \text{ sont distincts}}} \Lambda(\mathbf{e}_{\mathbf{j}}) \mathbf{e}_{\mathbf{j}}^*.$$

Preuve: Si Λ est alternée

$\Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ dès que il existe

$1 \leq i \neq i' \leq n$ tels que $e_{j_i} = e_{j_{i'}}$

$\iff j_i = j_{i'}$

Donc dans la décomposition

$$\Lambda = \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in \{1, \dots, d\}^n} \Lambda(e_{d_1}, \dots, e_{d_n}) e_{d_1}^* \otimes \dots \otimes e_{d_n}^*$$

les termes où il existe $i \neq i'$ tq $d_i = d_{i'}$
sont nuls.

Une forme alternée en $n=3$ variables
n'aura pas de composante

en $e_1^2 \otimes e_2^a \otimes e_1^2$ car $\Lambda(e_1, e_2, e_1) = 0$



Rmq: $\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$ j_i distincts

\vec{j} peut être vu comme une application

$$\begin{aligned} \vec{j} : \{1, \dots, n\} &\longrightarrow \{1, \dots, d\} \\ i &\longrightarrow j_i \end{aligned}$$

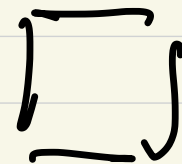
(j_1, \dots, j_n) n'a aucune paire de coordonnées
égales $\iff \vec{j}$ est injective.

COROLLAIRE 11.1. Supposons que $n > d$, alors $\text{Alt}^{(n)}(V) = \{0\}$.

Preuve: si $n > d$ il n'existe pas

d'application injective

$$\{1, \dots, n\} \hookrightarrow \{1, \dots, d\}$$



Cas $n = d$: si $\vec{j} : \{1, \dots, d\} \hookrightarrow \{1, \dots, d\}$
↑
injective

\vec{j} est bijection

$\exists \sigma \in \mathcal{G}_d$ tq

$$\vec{j} = (j_1, \dots, j_d) = (\sigma(1), \dots, \sigma(d))$$

COROLLAIRE 11.2. Soit $\Lambda \in \text{Alt}^{(d)}(V)$ une forme alternée en $d = \dim V$ variables alors

$$(11.2.2) \quad \Lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_d} \Lambda(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(d)}) \mathbf{e}_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\sigma(d)}^*$$

Alternance et Permutations

Alternance et Transpositions

$$\Lambda \in \text{Alt}^{(n)}(V)$$

$$\Lambda(v_1+v_2, v_1+v_2, v_3, \dots, v_n) = 0$$

$$\Lambda(v_1, v_1, v_3, \dots, v_n) + \Lambda(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$+ \Lambda(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) + \Lambda(v_2, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$0 = \Lambda(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) + \Lambda(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n)$$

$$\Lambda(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) = -\Lambda(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

et $\forall i \neq j$

$$\Lambda(v_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{v_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{v_i}, \dots, v_n) = -\Lambda(v_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{v_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{v_j}, \dots, v_n)$$

Remq: Si $\text{Car } K = 2$ $1_K = -1_K$
et si Λ est alternée

$$\Lambda(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = \Lambda(v_2, v_1, \dots, v_n).$$

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n \quad (1,2)\Lambda(v_1, \dots, v_n) = \Lambda(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n)$$

$$\sigma.\Lambda : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \Lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

THÉORÈME 11.2 (Action par permutation sur les formes multilinéaires). *Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et toute forme multilinéaire $\Lambda \in \text{Mult}^{(n)}(V)$, la fonction $\sigma.\Lambda$ est multilinéaire.*

De plus l'application

$$\sigma.\bullet : \Lambda \in \text{Mult}^{(n)}(V) \mapsto \sigma.\Lambda \in \text{Mult}^{(n)}(V)$$

definit un automorphisme du K -ev $\text{Mult}^{(n)}(V)$ et enfin l'application

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \sigma.\bullet \in \text{GL}(\text{Mult}^{(n)}(V))$$

est un morphisme de groupes. En d'autres termes l'association

$$(\sigma, \Lambda) \mapsto \sigma.\Lambda$$

defini une action à gauche $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \text{Mult}^{(n)}(V)$.

Preuve: On laisse en exercice le fait que

$\sigma.\Lambda$ est multilinéaire, et que

$\sigma.\bullet : \Lambda \rightarrow \sigma.\Lambda$ est linéaire

Soient $\sigma, \tau \in \mathcal{G}_n$

$$(\sigma \circ \tau) \cdot \Lambda = \sigma \cdot (\tau \cdot \Lambda)$$

$$(\sigma \circ \tau) \Lambda (v_1, \dots, v_n) = \Lambda (v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(n))})$$

$$\sigma(\tau \cdot \Lambda)(v_1, \dots, v_n) = (\tau \cdot \Lambda)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

$$\begin{aligned} w_i = v_{\sigma(i)} &= (\tau \cdot \Lambda)(w_1, \dots, w_n) \\ &= \Lambda(w_{\tau(1)}, \dots, w_{\tau(n)}) \end{aligned}$$

$$w_{\tau(i)} = v_{\sigma(\tau(i))}$$

$$\sigma(\tau \cdot \Lambda)(v_1, \dots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(n))})$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (\sigma \circ \sigma^{-1}) \Lambda &= \sigma(\sigma^{-1} \Lambda) \\ &= \text{Id}_n \cdot \Lambda = \Lambda \end{aligned}$$

$$(\sigma \circ \sigma^{-1}) = (\sigma^{-1}) \circ \sigma$$

...

□

Rappels sur \mathcal{S}_n

\mathcal{S}_n est engendré par les transpositions

$\sigma \in \mathcal{S}_n \exists \tau_1, \dots, \tau_t$ des transpositions

$$\uparrow q \quad \sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_t \circ \tau \circ \tau$$

associe à $\sigma \rightsquigarrow$ signature $\text{sign}(\sigma) = (-1)^t$

$$\text{sign}: \mathcal{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$\sigma \longmapsto (-1)^t$$

est un morphisme de groupes

$$\text{sign}(\sigma\sigma') = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma')$$

comme 1 et -1 sont leurs propres inverses

$$\text{dans } \{\pm 1\} \quad \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1}).$$

Rmq: sign est l'unique morphisme
non trivial ($\neq 1$) de G_n a valeurs
de $\{\pm 1\}$.

THÉORÈME 11.3. Soit $\Lambda \in \text{Alt}^{(n)}(V)$ une forme alternée et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation alors
 $\sigma.\Lambda = \text{sign}(\sigma).\Lambda.$

Preuve: soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_t$ ds

$\Lambda \in \text{Alt}^{(n)}(V)$

transposition

$$\sigma.\Lambda = \tau_1(\tau_2(\dots(\tau_t \Lambda)))$$

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_t$$

$$\tau_t \Lambda = -\Lambda \text{ et alternée}$$

$$= -\tau_1(\tau_2(\dots(\tau_{t-1} \Lambda))) = (-1)^t \Lambda$$

□

Determinants

Le Determinant

THÉORÈME 11.4. Soit $\Lambda \in \text{Alt}^d(V)$, on a pour toute base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ on a

$$\Lambda(v_1, \dots, v_d) = \Lambda(e_1, \dots, e_d) \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_d)$$

avec

$$(11.2.4) \quad \det_{\mathcal{B}} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes e_{\sigma(d)}^*.$$

De plus la forme $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée et non-nulle.

Preuve: On sait que si Λ est alternée en d variable

$$\Lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \lambda_{\sigma} e_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes e_{\sigma(d)}^*$$

$$\lambda_{\sigma} = \Lambda(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(d)})$$

$$= (\sigma \cdot \wedge)(e_1, \dots, e_d) = \text{sign}(\sigma) \wedge(e_1, \dots, e_d)$$

$$\wedge(\bullet) = \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_d} \text{sign}(\sigma) \wedge(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(d)}) e_{\sigma(1)}^{\wedge} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(d)}^{\wedge}$$

$$= \wedge(e_1, \dots, e_d) \det_B(\bullet)$$

$$\det_B(\bullet) \neq \underline{0}$$

$$\det_B(e_1, \dots, e_d) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^{\wedge}(e_1) \otimes \dots \otimes e_{\sigma(d)}^{\wedge}(e_d)$$

De la somme $\sum_{\sigma} \dots$ tous les termes
sont nuls sauf si $\sigma(1)=1, \dots, \sigma(d)=d$

$$\Leftrightarrow \sigma = \text{Id}_d$$

$$\det_{\mathbb{B}}(e_1, \dots, e_d) = 1$$

$M_q \det_{\mathbb{B}}$ est alternée

det_B est alterné:

LEMME 11.1. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_d$ une permutation et $l_1, \dots, l_d \in V^*$ des formes linéaires. On a

$$\tau.(l_1 \otimes \dots \otimes l_d) = l_{\tau^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes l_{\tau^{-1}(d)}.$$

Preuve: $\tau \in \mathfrak{S}_d$

$$\tau.(l_1 \otimes \dots \otimes l_d)(v_1, \dots, v_d) = l_1(v_{\tau(1)}) \times l_2(v_{\tau(2)}) \times \dots \\ \times l_d(v_{\tau(d)})$$

$$j = \tau(i) \quad i=1, \dots, d \\ i = \tau^{-1}(j) \quad j=1, \dots, d$$

$$l_1(v_{\tau(1)}) \cdots l_d(v_{\tau(d)}) = \prod_{i=1}^d l_i(v_{\tau(i)})$$

$$= \prod_{j=1}^d l_{\tau^{-1}(j)}(v_j)$$

$$= l_{\tau^{-1}(1)}(v_1) \cdots l_{\tau^{-1}(d)}(v_d)$$

$$= l_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes l_{\tau^{-1}(d)}(v_1, \dots, v_d)$$

□

soit $\tau \in \mathcal{S}_d$

$$\tau \cdot 1 = \tau \cdot \left(\sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^{\otimes} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(d)}^{\otimes} \right)$$

$$= \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \tau \cdot \left(e_{\sigma(1)}^{\otimes} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(d)}^{\otimes} \right)$$

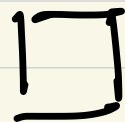
$$= \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(\tau^{-1}(1))}^{\otimes} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(\tau^{-1}(d))}^{\otimes}$$

$$\sigma^{-1} = \sigma \circ \tau^{-1} \quad \sigma = \sigma^{-1} \circ \tau$$

$$\tau. \Lambda = \sum_{\sigma' \in G_d} \underset{\parallel}{\text{sign}(\sigma' \circ \tau)} e_{\sigma'(1)}^1 \otimes \dots \otimes e_{\sigma'(d)}^d$$

$$= \text{sign}(\tau) \Lambda$$

$\Lambda = \det_B$ est alterné.



Rmq: Cette preuve ne marche que si

Car $K \neq 2$.

On a mq $\forall \tau$ transposition

$$\tau \cdot \det_B = -\det_B$$

$$\tau = (1, 2) \implies \det_B(v_1, v_2, v_3, \dots, v_d) = -\det_B(v_2, v_1, v_3, \dots, v_d)$$

$$\text{Si } v_1 = v_2 = v \quad \det(v, v, v_3, \dots, v_d) = -\det(v, v, v_3, \dots, v_d)$$

$$\rightarrow 2 \det(v, v, v_3, \dots, v_d) = 0$$

$$\text{Si } 2_K \neq 0 \rightsquigarrow \det(v, v, v_3, \dots, v_d) = 0$$

Si $\text{Car } K \neq 2$.

DÉFINITION 11.3. Soit V un K -EV de dimension d et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ une base de V .

La forme alternée

$$\det_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes e_{\sigma(d)}^* = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \epsilon^{-1} (e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*)$$

est appelée déterminant de V dans la base \mathcal{B} .

PROPOSITION 11.5. Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}$ a les propriétés suivantes:

(1) La forme $\det_{\mathcal{B}}$ est une base de $\text{Alt}^d(V)$; en particulier $\dim_K(\text{Alt}^d(V)) = 1$.

(2) $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme multilinéaire alternée Λ vérifiant

$$(11.2.5) \quad \Lambda(e_1, \dots, e_d) = 1.$$

(3) Si \mathcal{B}' est une base de V alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0.$$

Preuve: le fait que $\det_{\mathcal{B}}$ soit une base résulte du Thm précédent,

si \mathcal{B}' est une autre base de V

alors \det_B est aussi une base de $\text{Alt}^{(d)}(V)$

$$\det_B = \det_B(B') \cdot \det_{B'}$$

et comme $\det_B \neq 0 \implies \det_B(B') \neq 0$

Forme Alternée en $n \leq d$ variables

THÉORÈME 11.6. Soit $d = \dim V$. On a

$$\dim \text{Alt}^{(n)}(V) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > d \\ 1 & \text{si } n = d \\ C_d^n & \text{si } n \leq d \end{cases}$$

C'est le nombre de n -uplets de $\{1, \dots, d\}^n$ qui sont strictement croissants: les

$$\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \subset \{1, \dots, d\}^n$$

avec

$$1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq d$$

ou encore le nombre d'applications strictement croissantes

$$\mathbf{j} : i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow j_i \in \{1, \dots, d\}.$$

Une base de $\dim \text{Alt}^{(n)}(V)$ est donnée par les formes multilinéaires alternées suivantes

$$\Lambda_{\mathbf{j}, \mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \sigma.(\mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \mathbf{e}_{j_{\sigma(1)}}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_{\sigma(n)}}^*$$

quand \mathbf{j} parcourt les n -uplets de $\{1, \dots, d\}^n$ qui sont strictement croissants:

$$\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, d\}^n, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq d.$$

Formes symétriques

DÉFINITION 11.5. Une forme multilinéaire en n variables

$$\Lambda : V^n \mapsto K$$

est dite symétrique si pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\sigma.\Lambda = \Lambda.$$

L'ensemble des formes multilinéaires symétriques en n variables sur V est noté

$$\text{Sym}^{(n)}(V).$$

PROPOSITION 11.6. L'ensemble $\text{Sym}^{(n)}(V)$ est un SEV de l'espace vectoriel $\text{Mult}^{(n)}(V)$.

Exemple: $V = K^d$ $n=2$

$$\langle v, v' \rangle = v_1 \cdot v'_1 + \dots + v_d \cdot v'_d$$

$$v = (v_1, \dots, v_d) \in K^d$$
$$v' = (v'_1, \dots, v'_d)$$

$$\langle v, v' \rangle = \langle v', v \rangle$$

THÉORÈME 11.7. *L'espace $\text{Sym}^{(n)}(V)$ est de dimension*

$$\dim \text{Sym}^{(n)}(V) = C_{d+n-1}^n = C_{d+n-1}^{d-1}.$$

C'est le nombre de n -uplets croissants de $\{1, \dots, d\}^n$ qui sont croissants: les

$$\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \subset \{1, \dots, d\}^n$$

avec

$$1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq d$$

ou encore le nombre d'applications croissantes

$$\mathbf{j} : i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow j_i \in \{1, \dots, d\}.$$

Une base de $\dim \text{Sym}^{(n)}(V)$ est donnée par les formes multilinéaires symétriques suivantes

$$S_{\mathbf{j}, \mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma.(\mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_n})$$

quand \mathbf{j} parcourt les n -uplets croissants de $\{1, \dots, d\}^n$ qui sont croissants:

$$\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, d\}^n, \quad 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq d.$$

Preuve: Exercice.

□

Cf: principe de Symétrisation

Existe quand un gp fini agit
linéairement sur K -ev.

$$(\mathcal{O}_n \curvearrowright V^{\otimes n})$$

$$V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \{\pm 1\} \curvearrowright \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\begin{array}{c} \varepsilon \circ f : x \rightarrow f(\varepsilon \cdot x) \\ \uparrow \\ \{\pm 1\} \end{array}$$

$$f^+ : x \rightarrow f(x) + f(-x) \quad \text{est paire}$$

$$f^- : x \rightarrow f(x) - f(-x) \quad \text{est impaire}$$

Propriétés des Determinants

$$\det_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma(1)}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\sigma(d)}^*.$$

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_d) = ?$$

$$v_i = \sum_{j=1}^d \kappa_{ij} e_j$$

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(v_1) \cdots e_{\sigma(d)}^*(v_d)$$

$$e_{\sigma(i)}(v_i) = \alpha_i \sigma(i)$$

$$\det_B(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}^V} \text{sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{d\sigma(d)}$$

$$\det_B = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^{\otimes} \dots \otimes e_{\sigma(d)}^{\otimes}$$

$$\sigma' = \sigma^{-1}$$

$$= \sum_{\sigma'} \text{sign}(\sigma'^{-1}) e_{\sigma'^{-1}(1)}^{\otimes} \dots \otimes e_{\sigma'^{-1}(d)}^{\otimes}$$

$$\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$$

$$\det_B = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma^{-1}(1)}^{\otimes} \otimes \dots \otimes e_{\sigma^{-1}(d)}^{\otimes}$$

$$\det_B(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \kappa_{\sigma(1)1} \cdot \kappa_{\sigma(2)2} \cdot \dots \cdot \kappa_{\sigma(d)d}$$

PROPOSITION 11.7 (Formules combinatoire pour le determinant). Soient v_1, \dots, v_d des vecteurs dont les decompositions dans la base \mathcal{B} sont donnees par

$$v_i = \sum_{j=1}^d x_{ij} \mathbf{e}_j.$$

On a les formules suivantes

$$(11.3.3) \quad \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^d x_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{d\sigma(d)}.$$

$$(11.3.4) \quad \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^d x_{\sigma(j)j} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(d)d}.$$

Determinant d'un

Endomorphisme

$$\varphi: V \rightarrow V$$

$$\Lambda \in \text{Alt}^{(d)}(V) - \{0\}$$

$$\varphi^* \Lambda: (v_1, \dots, v_d) = \Lambda(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_d))$$

$\varphi^* \Lambda$ est encore alterné

$$\varphi^{\wedge} \Lambda(v, v, v_3, \dots, v_d)$$

$$= \Lambda(\varphi(v), \varphi(v), \varphi(v_3), \dots, \varphi(v_d)) = 0$$

Comme Λ est base de $\text{Alt}^{(d)}(V)$

$$\varphi^{\wedge} \Lambda = \lambda \varphi \cdot \Lambda$$

$$\lambda \varphi = \text{determinant de } \varphi = \det \varphi$$

DÉFINITION 11.6. *Le déterminant de φ , $\det \varphi \in K$ est le scalaire vérifiant pour toute forme alternée $\Lambda \in \text{Alt}^{(d)}(V)$, l'identité*

$$(11.3.5) \quad \varphi^*(\Lambda) = \det(\varphi)\Lambda.$$

En particulier $\det(\varphi)$ ne dépend pas du choix d'une base de V et pour toute base $\mathcal{B} \subset V$ on a

$$\varphi^*(\det_{\mathcal{B}}) = \det(\varphi)\det_{\mathcal{B}}.$$

THÉORÈME 11.9 (Propriétés fonctionnelles du déterminant). Soit $\varphi : V \mapsto V$ un endomorphisme. L'application $\det : \text{End}(V) \mapsto K$ a les propriétés suivantes

(1) Homogénéité: soit $\lambda \in K$ alors

$$\det(\lambda \cdot \varphi) = \lambda^d \cdot \det(\varphi).$$

(2) Multiplicativité: on a

$$\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi) \det(\varphi) = \det(\varphi) \det(\psi) = \det(\varphi \circ \psi).$$

(3) Invariance par conjugaison: pour tout $\varphi \in \text{End}(V)$ et $\psi \in \text{GL}(V)$ on a

$$\det(\text{Ad}(\psi)(\varphi)) = \det(\psi \varphi \psi^{-1}) = \det(\varphi).$$

(4) Morphisme: L'application

$$\det : \text{GL}(V) \mapsto K^\times$$

est un morphisme de groupes. En particulier $\det(\text{Id}_V) = 1$.

(5) Critère d'inversibilité: on a

$$\det(\varphi) \neq 0 \iff \varphi \in \text{GL}(V).$$

Preuve: Λ alt $\neq 0$

$$\varphi^* \Lambda = \det \varphi \Lambda$$

$$(\lambda \varphi)^* \Lambda(v_1, \dots, v_d) = \Lambda(\lambda \varphi(v_1), \dots, \lambda \varphi(v_d))$$

\parallel

$$\det(\lambda \varphi) \Lambda(v_1, \dots, v_d)$$

$$= \lambda^d \Lambda(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_d))$$

$$= \lambda^d \varphi^* \Lambda(v_1, \dots, v_d)$$

$$= \lambda^d \det \varphi \cdot \Lambda(v_1, \dots, v_d)$$

$$\det(\psi \circ \varphi) = ?$$

$$(\psi \circ \varphi)_* \wedge (v_1, \dots, v_d) = \wedge (\psi(\varphi(v_1)), \dots, \psi(\varphi(v_d)))$$

$$= \psi_* \wedge (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_d))$$

$$= \det \psi \wedge (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_d))$$

$$= \det \psi \cdot \varphi_* \wedge (v_1, \dots, v_d)$$

$$= \det \psi \det \varphi \cdot \wedge (v_1, \dots, v_d)$$

$$- \det(\text{Id}_V) = 1$$

$$\cdot \text{Id}_V^* \Lambda = \Lambda$$

$$- \text{si } \varphi \in \text{GL}(V)$$

$$\det(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \det(\varphi) \det(\varphi^{-1}) = \det(\text{Id}_V)$$

$$\det(\varphi) \in K^\times \text{ et } (\det \varphi)^{-1} = \det(\varphi^{-1})$$

$\det: GL(V) \longrightarrow K^{\times}$ est un morphisme

de groupes.

Rmq:

Si $\varphi \notin GL(V)$ alors $\det \varphi = 0$

soit $e_1, \dots, e_d =$ base de V

alors $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$ n'est pas libre

$$\det_B(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)) = \det \varphi \cdot \det_B(e_1, \dots, e_d)$$

$$\stackrel{||}{=} 0$$

$$= \det \varphi \cdot 1$$

