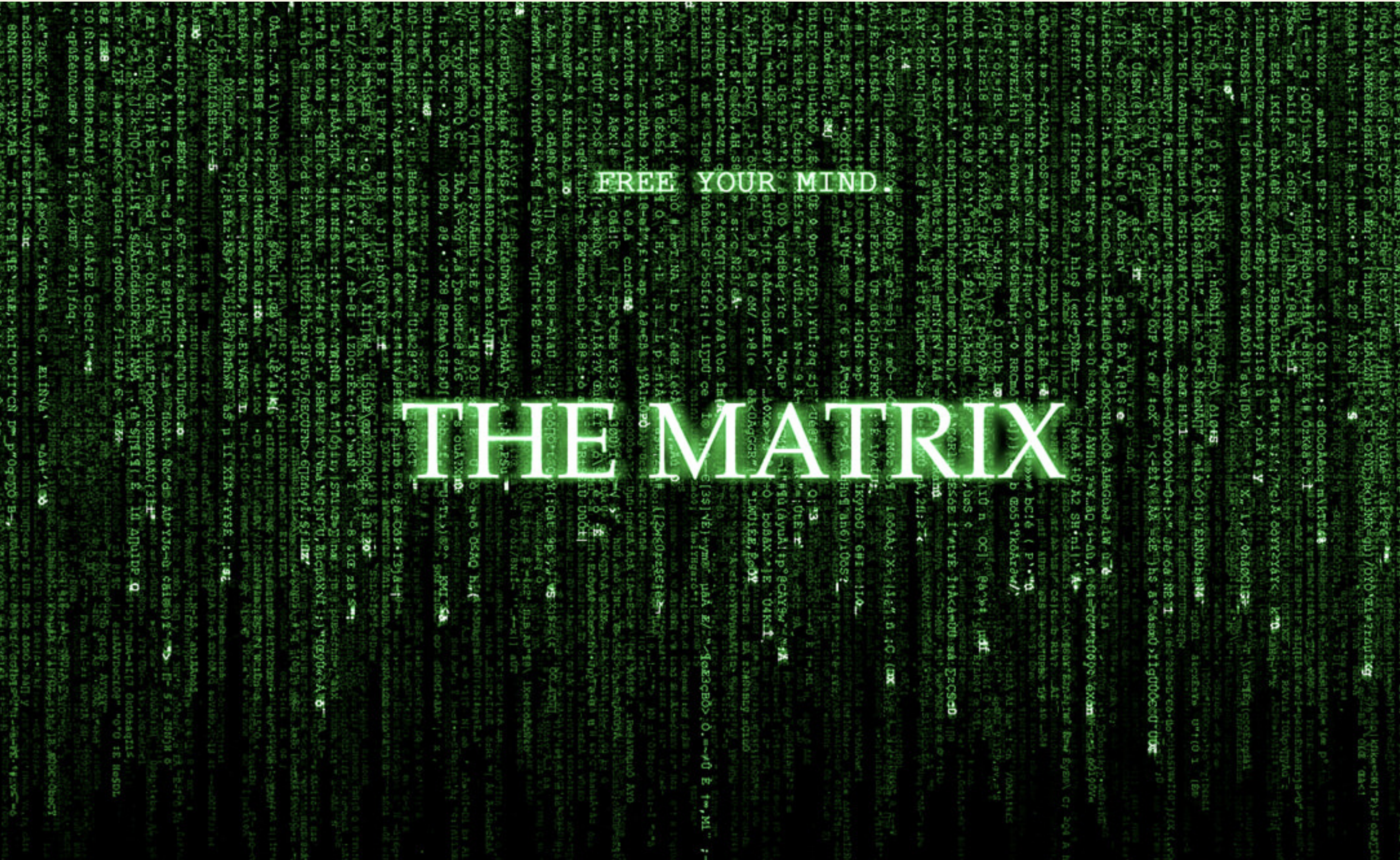

FREE YOUR MIND.
THE MATRIX

Equivalences de Matrices

DÉFINITION 9.10. *Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont dites equivalentes si il existe des matrices inversibles $A \in \mathrm{GL}_{d'}(K)$, $B \in \mathrm{GL}_d(K)$ telles que*

$$N = A.M.B.$$

PROPOSITION 9.8. *Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont equivalentes ssi il existe V de dimension d et W de dimension d', des bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}_n \subset V$ et $\mathscr{B}', \mathscr{B}'_n \subset W$ et une application lineaire $\varphi : V \mapsto W$ telle que*

$$M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}' \mathscr{B}}(\varphi), \; N = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n \mathscr{B}_n}(\varphi)$$

PROPOSITION. *La relation "etre equivalente" est une relation d'equivalence (reflexive, symetrique, transitive) sur $M_{d' \times d}(K)$.*

THÉORÈME 9.12. *Soient* $M, N \in M_{d' \times d}(K)$. *Les conditions suivantes sont equivalentes*

(1) M *et* N *sont equivalentes,*
(2) $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$,
(3) M *et* N *sont equivalentes a* $I_{d' \times d}(r)$.

$$I_{d' \times d}(r) = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & \mathrm{Id}_r & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices Semblables

DÉFINITION 9.11. *On dit que deux matrices M, N sont semblables ou conjuguees si il existe $C \in GL_d(K)$ tel que*
$$N = C.M.C^{-1}.$$
La relation "etre semblables" ou "etre conjuguees" est une relation d'equivalence.

Une classe d'equivalence pour cette relation, l'ensemble des matrices de la forme
$$M^\natural := \mathrm{Ad}(\mathrm{GL}_d(K))(M) = \{C.M.C^{-1},\ C \in \mathrm{GL}_d(K)\}$$
est appellee classe de conjugaison (de M) et on note
$$M_d(K)^\natural = \{M^\natural\} = M_d(K)/\sim$$
l'ensemble des classes de conjugaison.

Rmq: Semblables $\Rightarrow$ equivalentes

Proposition 9.9. *Deux matrices $M, N \in M_d(K)$ sont semblables ssi M et N sont les matrices d'un meme endomorphisme dans des bases convenables: il existe un espace vectoriel V de dimension d, un endomorphisme $\varphi : V \mapsto V$ et deux bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}_n \subset V$ telles que*

$$M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi), \;\; N = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n}(\varphi).$$

Action par Conjugaison

DÉFINITION 9.12. *Soit* $C \in GL_d(K)$ *une matrice inversible. Note note* $\mathrm{Ad}(C)$ *l'application dite de conjugaison par* C*:*

$$\mathrm{Ad}(C) : \begin{array}{ccc} M_d(K) & \mapsto & M_d(K) \\ M & \mapsto & C.M.C^{-1}. \end{array}$$

PROPOSITION 9.10. *La conjugaison* $\mathrm{Ad}(C)$ *est un automorphisme de l'algebre* $M_d(K)$*:*

(1) Linearite: On a $\mathrm{Ad}(C)(\lambda.M + N) = \lambda \mathrm{Ad}(C)(M) + \mathrm{Ad}(C)(N)$.
(2) Multiplicativite: $\mathrm{Ad}(C)(M.N) = \mathrm{Ad}(C)(M).\mathrm{Ad}(C)(N)$.
(3) Inversibilite: $\mathrm{Ad}(C)$ *est bijective et* $\mathrm{Ad}(C)^{-1} = \mathrm{Ad}(C^{-1})$.

PROPOSITION 9.11. *On dispose donc d'une application*

$$\mathrm{Ad}(\bullet) : C \in \mathrm{GL}_d(K) \mapsto \mathrm{Ad}(C) \in \mathrm{Aut}(M_d(K)) \simeq \mathrm{GL}_{d^2}(K)$$

appellee application adjointe.

L'application adjointe $\mathrm{Ad}(\bullet)$ *est un morphisme de groupes et definit donc une action a gauche* $\mathrm{GL}_d(K) \curvearrowright M_d(K)$*. Son noyau est forme par les matrices scalaires:*

$$\ker \mathrm{Ad} = K^{\times}\mathrm{Id}.$$

Operations Elementaires sur une matrice

The first matrix I designed was quite naturally perfect.

It was a work of art. Flawless. Sublime.

A triumph only equaled by its monumental failure.

I. Les Lignes

Définition 10.1. *Les operations elementaires sur les lignes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d'\times d}(K)$ vers $M_{d'\times d}(K)$: pour $i,j\in\{1,\cdots,d'\}$ et $\lambda\in K^\times$ et $\mu\in K$*

(I) Transposition: Echanger deux lignes $i\neq j\leqslant d'$ de M:

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

(II) Dilatation: Multiplier la i-eme ligne par un scalaire $\lambda\neq 0$:

$$L_i \to \lambda.L_i.$$

(III) Combinaison Lineaire: Additionner a la ligne i un multiple scalaire de la la j-ieme ligne pour $i\neq j$: $\mu\in K$

$$L_i \to L_i + \mu L_j$$

Ces transformations sont appellees transformations elementaires.

On les note respectivement T_{ij}, $D_{i,\lambda}$ et $Cl_{ij,\mu}$

Rmq: On pose $T_{ii} = Id$

$Cl_{ii,\mu} = L_i \to L_i + \mu L_i$ si $1+\mu\neq 0$

$= D_{i,1+\mu}$

Exemple : Car $K \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 10.1. *Ces trois types d'operations*

$$T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} : M_{d'\times d}(K) \mapsto M_{d'\times d}(K).$$

sont des applications lineaires bijectives sur $M_{d'\times d}(K)$

$$T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} \in \mathrm{GL}(M_{d'\times d}(K)).$$

<u>Preuve</u> T_{ij} : $L_i \longleftrightarrow L_j$

$$L_i(\lambda M+N) = \lambda L_i(M) + L_i(N)$$

$$\longleftrightarrow L_j(\lambda M+N) = \lambda L_j(M) + L_j(N)$$

Pareil pour les autres transformations

Proposition 10.2. *Les trois operations elementaires sont obtenues par multiplication a gauche de M par des matrices convenables: pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant d'$*

(I) $T_{ij}.\bullet : M \mapsto T_{ij}.M$

(II) $D_{i,\lambda}.\bullet : M \mapsto D_{i,\lambda}.M$

(III) $Cl_{ij,\mu}.\bullet : M \mapsto Cl_{ij,\mu}.M.$

ou les matrices carrees $T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} \in M_{d'}(K)$ sont definies par:

$$T_{ij} = \mathrm{Id}_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

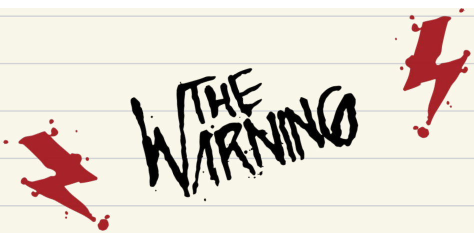
$$D_{i,\lambda} = \mathrm{Id}_{d'} + (\lambda - 1).E_{ii},\ \ \lambda \neq 0$$

$$Cl_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_{d'} + \mu.E_{ij},\ \ i \neq j \text{ ou } \mu \neq -1 \text{ si } i = j.$$

Définition 10.2. *Les matrices*

$$T_{ij},\ \ D_{i,\lambda},\ \ \lambda \neq 0,\ \ Cl_{ij,\mu}$$

pour $i, j \leqslant d'$, $\lambda \neq 0$, et si $i = j$, $\mu \neq -1$ sont appellees matrices de transformations elementaires.



Ne pas confondre avec matrices elementaires

Preuve (Idee) $E_{ij} = (e_{ij,kl})_{k,l}$

$$e_{ij,kl} = \delta_{k=i}\,\delta_{l=j}$$

$$(E_{ij}M)_{kl} = \sum_{v=1}^{d'} e_{ij,kv}\cdot m_{vl}$$

$$= \sum_{v=1}^{d'} \delta_{k=i}\,\delta_{v=j}\, m_{vl}$$

$$= \delta_{k=i} \sum_{v=1}^{d'} \delta_{v=j}\, m_{vl} = \delta_{k=i}\, m_{jl}$$

$$(E_{ij}M)_{kl} = \delta_{k=i}\, m_{jl}$$

Toutes les lignes de $E_{ij}M$ sont nulles sauf la i-ieme et la i-eme ligne et la j-ieme ligne de M

$(Id_d + \mu E_{ij})M$ et la matrice M a laquelle on a ajoute

$\lambda E_{ij} . M$: on ajoute à M la $\lambda \times$ la $j$ième ligne en position i

$$T_{ij} = I_d - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

$$T_{ij} . M = (I_d - E_{ii} - E_{jj}) M + E_{ij} M + E_{ji} M$$

...

$\square$

Rmq : les matrice T_{ij} $D_{i,\lambda}$ $C_{L_{ij,\mu}}$

sont inversible et leurs inverses sont

$T_{ij}^{-1} = T_{ij}$, $D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,\lambda^{-1}}$, $C_{L_{ij,\mu}}^{-1} = C_{L_{ij,-\mu}}$

.

DÉFINITION 10.3. *On dit que N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite de transformations elementaires qui transforme M en N.*

– De maniere equivalente, N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite finie de matrices des transformations elementaires telle que N est obtenue a partir de M par multiplications a gauche par cette suite de matrices.

$N = T_n \dots T_3 T_2 T_1 M$ T_i = matrices de transf elementaire

<u>Exemple</u>

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est ligne-equivalente à Id_3

PROPOSITION 10.3. *La relation etre "ligne-equivalente" est une relation d'equivalence sur $M_{d' \times d}(K)$.*

– De plus deux matrices M, N ligne-equivalentes sont equivalentes au sens de la notion d'equivalence de deux matrices de la Definition 9.10.

<u>Preuve</u>: si $N \sim_{ligne} M$

$N = T_n T_{n-1} \cdots T_1 M$ T_i mat de transf elementaire

$\rightsquigarrow$ T_i est inversible $\prod_i T_{n-i}$ est inversible

$\Longrightarrow$ $N \sim M$

Symetrie :

$$N = T_n T_{n-1} \cdots T_1 M$$

$$T_1^{-1} \times \cdots \times T_{n-1}^{-1} T_n^{-1} N = M$$

inverses de mat de transf elem
sont de mat de transf elem

$\rightsquigarrow M \sim_{\text{ligne}} N$.

Corollaire. *Si M et N sont lignes equivalentes alors*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N).$$

Proposition 10.4. *Si $N \in M_{d' \times d}(K)$ est ligne-equivalente a M alors toute ligne de N est combinaison lineaire des lignes de M :*

$$\forall i \leqslant d',\ \mathrm{Lig}_i(N) \in \langle \mathrm{Lig}_1(M), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(M) \rangle \subset K^d$$

et inversement les lignes de M sont combinaisons lineaires des lignes de N. En particulier les SEV engendres par les lignes de M et de N sont les memes

$$\langle \mathrm{Lig}_1(M), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(M) \rangle = \langle \mathrm{Lig}_1(N), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(N) \rangle \subset K^d$$

$$M = \begin{pmatrix} L_1(M) \\ L_2(M) \\ \\ L_{d'}(M) \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} L_1(N) \\ L_2(N) \\ \\ L_{d'}(N) \end{pmatrix}$$

$$L_i(M) \in \mathrm{Lig}_d(K) \qquad L_i(N) \in \mathrm{Lig}_d(K)$$

Preuve: il suffit de verifier la propriete

si $N = T_{ij} M$ ou bien $N = D_{i,\lambda} \cdot M$

ou bien $N = CL_{ij,\lambda} \cdot M$

Si $N \sim_{\text{ligne}} M \Rightarrow \mathrm{Vect}(L_i(N)\, i \leq d') \subset \mathrm{Vect}(L_i(M)\, i \leq d')$

mais comme $M \sim_{\text{ligne}} M \Rightarrow \mathrm{Vect}(L_i(M)\, i \leq d') \subseteq \mathrm{Vect}(L_i(N))$

$\square$

Echelonnage

Définition 10.4. *Une matrice* $M = (m_{ij}) \in M_{d' \times d}(K)$ *est echelonnee si elle est nulle ou bien si*

(1) *Il existe* $1 \leqslant r \leqslant d$ *et* $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d$ *tels que*
   - *Pour la ligne* L_1*, le premier terme non-nul est le* j_1*-ieme: on a* $m_{1j} = 0$ *pour tout* $j < j_1$ *et* $m_{1j_1} \neq 0$,
   - *Pour la ligne* L_2*, le premier terme non-nul est le* j_2*-ieme: on a* $m_{2j} = 0$ *pour tout* $j < j_2$ *et* $m_{2j_2} \neq 0$,
   - $\vdots$
   - *Pour la ligne* L_r*, le premier terme non-nul est le* j_r*-ieme: on a* $m_{rj} = 0$ *pour tout* $j < j_r$ *et* $m_{rj_r} \neq 0$

(2) [illegible] *les lignes* $L_{r+1}, \cdots, L_{d'}$ *sont toutes nulles.*

Si M *est non-nulle les* $j_1 < \cdots < j_r$ *sont appeles les* <u>*echelons*</u> *de* M *et les* m_{ij_i}, $1 \leqslant i \leqslant r$ *sont les* <u>*pivots*</u> *de* M.

$$\begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & m_{24} & \cdots & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{35} & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 3$ $\quad j_1 = 2 \quad j_2 = 4 \quad j_3 = 5.$

DÉFINITION 10.5. *Une matrice est <u>echelonnee reduite</u> si le seul coefficient non-nul d'une colonne contenant un pivot est le pivot lui-meme et il vaut 1:*

– *pour tout* $i = 1, \cdots, r$
$$m_{ij_i} = 1.$$
– *Pour tout* $i = 1, \cdots, r$ *et tout* $1 \leqslant i' \neq i \leqslant d'$, *on a*
$$m_{i'j_i} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & m_{13} & 0 & 0 & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 10.1 (Gauss). *Toute matrice est ligne-equivalente a une matrice echelonnee reduite.*

<u>Preuve</u> : Si $M = \underline{0}_{d' \times d}$ ok on a fini

sinon soit j_1 le plus petit indice d'une colonne non-nulle il va servir de 1ere position de pivot : $m_{ij_1} \neq 0$

i est le premier coef $\neq 0$ de la colonne j_1

Quitte a permuter L_1 et L_i on peut supposer que $i=1 \rightsquigarrow$ le 1^{er} pivot est $m_{i j_1}$ on met tout le reste de la colonne j_1 a 0 par combinaison linéaire convenable

$i \neq 1$ $\qquad L_i \longleftrightarrow L_i - \frac{m_{i j_1}}{m_{1 j_1}} L_1 \qquad m_{i j_1} \longleftrightarrow m_{i j_1} - \frac{m_{i j_1}}{m_{1 j_1}} \cdot m_{1 j_1} = 0$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{1j_1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & m_{2,j_1} & m_{2,j_1+1} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & m_{3,j_1} & * & * & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & m_{4,j_1} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & m_{d',j_1} & m_{d',j_1+1} & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$L_1 \longleftrightarrow \frac{L_1}{m_{1j_1}}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & m_{2,j_1} & m_{2,j_1+1} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & m_{3,j_1} & * & * & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & m_{4,j_1} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & m_{d',j_1} & m_{d',j_1+1} & * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$L_2 \longleftrightarrow L_2 - m_{2j_1} \cdot L_1$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_3 - m_{3j_1} L_1 \quad \cdots$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & m_{2,j_1+1} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_{d',j_1+1} & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & m_{1j_2} & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{3,j_2+1} & * & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{4,j_2+1} & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{d',j_2+1} & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & * & m_{1j_2} & m_{1,j_3} & * & m_{1,j_4} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & m_{2,j_3} & * & m_{2,j_4} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & m_{3,j_3+1} & m_{3,j_4} & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FCB "la remontada"

$$R = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & * & 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & m_{3,j_3+1} & 0 & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Théorème 10.2 (Gauss). *Deux matrices ligne-equivalentes et echelonnees reduites sont egales.*

Preuve : (Yingham)

Corollaire 10.1. *(Unicite de la forme echelonne reduite) Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$ une matrice alors M est ligne-equivalente a une unique matrice echelonnee reduite (qu'on appelle la forme echelonnee reduite de M).*

Preuve; si $M \sim_{lig} R_1$ et $M \sim_{lig} R_2$

R_1 et R_2 reduites alors on a

$$R_1 \sim_{lig} M \sim_{lig} R_2 \Rightarrow R_1 \sim_{lig} R_2 \Rightarrow R_1 = R_2$$

$\square$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sont toutes reduite et pas ligne equivalente

Application

Calcul du Rang

Proposition 10.5. *Si M et N sont lignes equivalentes*

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(N).$$

Proposition 10.6. *Si R est echelonnee avec r echelons alors*

$$\operatorname{rg}(R) = r.$$

Preuve Soit R = echelonnée. r echellons

$$\operatorname{rg}(R) = \dim \operatorname{Vect}(L_1(R), L_2(R), \dots, L_r(R), 0, \dots, 0)$$

$$= \dim \operatorname{Vect}(L_1(R), \dots, L_r(R))$$

Il faut mq que $L_1, \dots, L_r$ sont lin indep

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_r L_r = \underline{0}_d$$

on regarde le j_1-ieme coefficient.

$$\lambda_1 \underset{\neq 0}{m_{1j_1}} + \lambda_2 \underset{= 0}{m_{2j_1}} + \underset{= 0}{\dots} + \lambda_r \underset{= 0}{m_{rj_1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0$$

Inversions de Matrices

PROPOSITION 10.7 (Critere d'inversibilite par operations elementaires). *Soit $M \in M_d(K)$ une matrice carree alors M est inversible ssi M est ligne equivalente a la matrice identite Id_d.*

Preuve : si M est inversible $\Longleftrightarrow rg(M) = d$

et si $M \sim_{lig} R$ = reduite on a

$1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \quad < j_d \leq d$

$1 = j_1 < j_2 = 2 < j_3 = 3 < \dots < j_d = d$

les position de pivots sont en $(i, j_i) = (i, i)$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_d$$

$\square$

Generateurs de $GL_d(K)$

THÉORÈME 10.3. *Le groupe lineaire* $\mathrm{GL}_d(K)$ *est engendre par les matrices des transformations elementaires*

$$T_{ij}, D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu},\ i,j \leqslant d,\ \lambda,\mu \in K,\ \lambda \neq 0,\ \text{et si } i=j,\ \mu \neq -1.$$

En d'autres termes (puisque l'ensemble des matrices de transformations elementaires est stable par inverse) tout matrice $M \in GL_d(K)$ *s'ecrit comme un produit fini de ces matrices.*

Preuve: si $M \in GL_d(K)$ alors

$$M \sim_{lig} Id_d$$

$$M = T_n \times \dots \times T_2 \cdot T_1$$

mat de tranf elem

$\square$

Calcul de l'Inverse : $M \in GL_d(\mathbb{K})$ M^{-1} ?

$$M = T_n T_{n-1} \times \cdots \times T_2 \times T_1$$

$$M^{-1} = T_1^{-1} \times T_2^{-1} \times \cdots \times T_{n-1}^{-1} \times T_n^{-1}$$

Methde des vases Communicants

$$I_d = \overbrace{T_n \quad T_4 \, T_3 \cdot T_2 \cdot T_1}^{M^{-1}} \cdot M$$

$$M^{-1} = T_n \times \quad \times T_3 \times T_2 \times T_1 \times I_d$$

Exemple : Car $K \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} M^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Extraction d'une base d'une famille generatrice

$\mathcal{G} = \{w_1, \cdots, w_e\}$ $\langle \mathcal{G} \rangle = W \subset V$

Obtenir une base de W.

On dispose d'une Base $\mathcal{B} \subset V$ $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_d\}$

- On exprime chaque

$$w_i = \sum_{j=1}^{d} x_{ij} e_j \quad x_{ij} \in K$$

$$w_i \longrightarrow L_i = (x_{i1}, \cdots, x_{id}) \in \mathrm{Lig}_d(K)$$

On forme la matrice M

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_\ell \end{pmatrix} \in M_{\ell \times d}(K)$$

$\rightsquigarrow R =$ forme échellonnée réduite de M

$$R = \begin{pmatrix} L_1' \\ \vdots \\ L_\ell' \end{pmatrix} \in M_{\ell \times d}(K)$$

On a vu que $\mathrm{Vect}(L_1', \dots, L_\ell')$

$$= \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_\ell)$$

Mais comme R est réduite (ou simplement échelonnée)

les ligne $L'_1, \dots, L'_r$ forment une famille libre

et $L'_{r+1}, \dots, L'_\ell = \underline{0}_d$

$\{L'_1, \dots, L'_r\}$ forme une base de $\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_r)$

on retransforme les L_i' en vecteurs

$w_i' \in W$ et

$\{w_1', \dots, w_r'\}$ = base de W

$\dim W = r$

$\square$

Proposition 10.8 (Description matricielle d'une base d'un SEV). *Soit $M \in M_{l\times d}(K)$ la matrice dont les l lignes sont formees des vecteurs lignes L_i, $i \leqslant l$. Soit R la matrice echelonee (reduite) associee a M et*

$$L'_i = \mathrm{Lig}_i(R),\ \ i \leqslant l$$

l'ensemble des lignes de R alors si R possede r echelons on a

$$\dim W = r$$

et les vecteurs de V correspondants aux r premieres lignes

$$\mathscr{B}_W = \{w'_i = \mathrm{Lig}_{\mathscr{B}}^{-1}(L'_i),\ \ i \leqslant r\}$$

forment une base de W (et les $l-r$ autres vecteurs sont nuls).

On peut alors completer $\mathscr{B}_W$ en un base $\mathscr{B}$ de V en prenant

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_W \sqcup \{\mathbf{e}_j,\ \ j \text{ n'est pas un echelon de } R\}.$$

$\{w'_1, \dots, w'_r\} \cup \{e_j \quad j = 1, \dots, d \quad j \neq j_i\}$

est une base de V.

Resolution de Systemes lineaires

$\varphi : V \longrightarrow W$

$w \in W$ un système linéaire c'est

trouver les $v \in V$ tq

$$\varphi(v) = w.$$

Trouver la préimage $\varphi^{(-1)}(\{w\}) \subset V$

Théorème 10.5 (Resolution d'equations dans les espaces vectoriels). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Pour tout $w \in W$, on pose*

$$\mathrm{Sol}_\varphi(w) = \varphi^{-1}(\{w\}) = \{v \in V,\ \varphi(v) = w\} \subset V$$

la preimage de w par φ. En particulier $\mathrm{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_W) = \ker \varphi$. Alors $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ est

- *soit $w \notin \varphi(V)$ et $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ est l'ensemble vide,*
- *soit $w \in \varphi(V)$: il existe $v^0 \in V$ tel que $\varphi(v^0) = w$ et alors*

$$\mathrm{Sol}_\varphi(w) = v^0 + \mathrm{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_d) = v^0 + \ker \varphi = \{v_0 + k,\ k \in \ker \varphi\}.$$

Preuve: si $w \notin \varphi(V)$ $\varphi^{(-1)}(\{w\}) = \emptyset$.

sinon soit $v^0 \in \mathrm{Sol}_\varphi(w)$ et $v \in \mathrm{Sol}_\varphi(w)$

alors $\varphi(v) - \varphi(v^0) = w - w = 0_W$

$= \varphi(v - v^0)$ $\quad v - v^0 \in \ker \varphi$

et donc $v - v^0 = k \in \ker \varphi$

$v = v^0 + k$. $\quad v^0 + \ker \varphi \supset \mathrm{Sol}_\varphi(w)$

si $v = v^0 + k$ $\quad k \in \ker \varphi \Longrightarrow$

$$\varphi(v) = \varphi(v^0) + \varphi(k) = w + 0 = w$$

$\Longrightarrow v \in \mathrm{Sol}_\varphi(w) \quad \mathrm{Sol}_\varphi(w) \supset v^0 + \ker \varphi$.

$\square$

Corollaire 10.2. *Avec les notations precedente, on a en particulier*

- *si* $\dim \ker \varphi = 0$ *(cad.* $\ker \varphi = \{\mathbf{0}_V\}$ *et* φ *est injective),* $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ *possede* 0 *ou* 1 *element pour tout* w.
- *si* $\mathrm{rg}\varphi = \dim \varphi(V) = \dim(W)$ *(cad.* $\varphi(V) = W$ *et* φ *est surjective)* $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ *possede au moins un element pour tout* w.
- *Si* $\dim V = \dim W$ *et que* φ *est ou bien injective ou bien surjective,* φ *est bijective et pour tout* w, $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ *possede exactement un element.*

Codage matriciel :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \cup & & \cup \\ B & & B' \end{array}$$

$$M = (m_{ij}) = \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi)$$

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_d . e_d \qquad w = w_1 . f_1 + \dots + w_{d'} . f_{d'}$$

$$\varphi(v) \overset{?}{=} w \iff M \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_d \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
m_{11}.v_1 + \cdots + m_{1d}.v_d &\overset{?}{=} w_1 \\
m_{21}.v_1 + \cdots + m_{2d}.v_d &= w_2 \\
&\vdots \\
m_{d'1}.v_1 + \cdots + m_{d'd}.v_d &= w_{d'}
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$T_n \cdot \qquad T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

$$T_n \cdot \qquad \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix} = ?$$

$$U \in M_{d'}(K) \qquad l_1(w_1, \dots, w_{d'})$$

$$T_n \cdot \ldots \cdot T_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} w_1 + U_{12} w_2 + \dots + U_{1d'} w_{d'} \\ \\ U_{d1} w_1 + \qquad + U_{dd'} w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc} R & \\ \end{array}
$$

$$
\Pi_n \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}}_{} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix},
$$

$$
\| ?
$$

$$
\Pi_n \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_r \\ \vdots \\ w'_r \\ w'_{r+1} \\ \vdots \\ w'_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \\ w'_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$w'_i = l_i(w_1, \ldots, w_{d'})$ avec $l_i \in (K^{d'})^*$ $i = 1 \ldots d'$

les ligne de R sont nulle pour $i > r$

on a donc les equation : pour $i > r$

$$l_i(w_1, \dots, w_{d'}) = 0 \quad i = r+1, \dots, d'$$

Pour que $Sol_\varphi(w)$ ait une solution il faut $l_i(w_1, \dots, w_{d'}) = 0$ pour $i \geq r+1$

Si au contraire $l_i(w_1, \dots, w_{d'}) = 0$ $i = r+1 \dots d'$

le fait que R soit echellonnée $\Longrightarrow$

on peut resoudre le reste du systeme

$$\begin{aligned} l_{r+1}(w_1, \dots, w_{d'}) &= 0 \\ l_{r+2}(w_1, \dots, w_{d'}) &= 0 \\ &\vdots \\ l_{d'}(w_1, \dots, w_{d'}) &= 0 \end{aligned}$$

st un representation cartesienne de $\varphi(V)$

DÉFINITION 10.7. *Les inconnues v_{j_i} pour j_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ etant un echelon sont appelles inconnues principales du systeme. Les inconnues v_j pour $j \leqslant d$ qui n'est pas un echelon sont appelles inconnues libres du systeme.*

En pratique: si w est tel que

$$l_{r+1}(w) = \cdots = l_{d'}(w) = 0 \quad (\Leftrightarrow w \in \varphi(V))$$

alors on trouve toute les solution de $\varphi(v) = w$ en donnant des valeur arbitraires aux v_j $j \neq j_i$ et alors les

inconnues principals V_{ji} seront determinées
de manière unique.

Les Colonnes

$$C_i = C_i(M) = \mathrm{Col}_i(M) = (m_{ij})_{i \leqslant d'}$$

DÉFINITION 10.8. *Les operations elementaires sur les colonnes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d' \times d}(K)$ vers $M_{d' \times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \cdots, d\}$ et $\lambda \in K^\times$ et $\mu \in K$*

(I) Transposition: Echanger deux colonnes $i \neq j \leqslant d'$ de M:

$$C_i \longleftrightarrow C_j$$

(II) Dilatation: Multiplier la i-eme colonne par un scalaire $\lambda \neq 0$:

$$C_i \to \lambda.C_i.$$

(III) Combinaison Lineaire: Additionner a la colonne i un multiple scalaire de la la j-ieme colonne pour $i \neq j$: $\mu \in K$

$$C_i \to C_i + \mu C_j$$

Ces transformations sont appellees transformations elementaires *sur les colonnes d'une matrice.*

Proposition 10.9. *Une operation elementaire sur les colonnes d'une matrice M equivaut a une operation elementaire sur les lignes de $M' = {}^tM$.*

Une telle transformation est donnee par multiplication par la droite

$$M \mapsto M.{}^tT_l$$

par la transposee d'une matrice de transformation elementaire sur les lignes T_l en composant les operations suivantes

$$M \mapsto {}^tM \mapsto T_l.{}^tM \mapsto {}^tT_l.{}^tM = M.{}^tT_l = M.T_c.$$

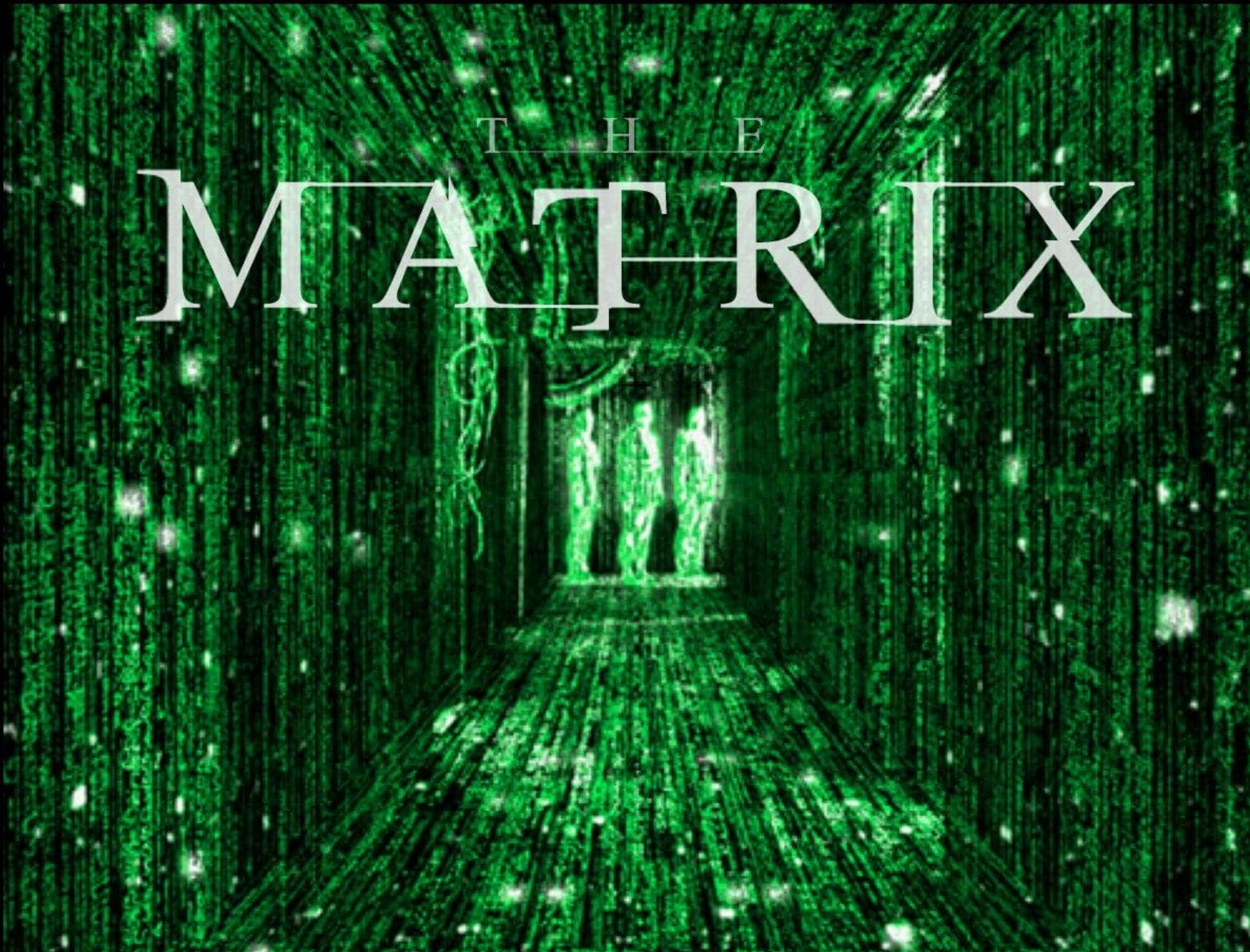
Il en resulte que des transformations sont bijectives et lineaires.

Définition 10.9. *On dit que N est colonne-equivalente a M ssi il existe une suite de transformations elementaires qui transforme M en N.*

– De maniere equivalente, N est colonne-equivalente a M ssi il existe une suite finie de matrices de transformations elementaires (sur les colonnes) telle que N est obtenue a partir de M par multiplications a droite par cette suite de matrices.

Proposition 10.10. *La relation etre "colonne-equivalente" est une relation d'equivalence sur $M_{d' \times d}(K)$.*

– De plus deux matrices M, N colonnes-equivalentes sont equivalentes au sens de la notion d'equivalence de deux matrices de la Definition 9.10. En particulier elles ont meme rang.


THE
MATRIX

Determinants

That object was to present the subject as a continuous chain of arguments, separated from all accessories of explanation or illustration, a form which I venture to think better suited for a treatise on exact science than the semi -colloquial semi-logical form often adopted by Mathematical writers.

Lewis Carroll
(1867)

Prelude : $M_2(K)$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ M est inversible ssi

$\det M = ad - bc \neq 0$ et alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Objectif</u> : On veut définir

$\Delta : V^d \longrightarrow K$ tq

- $\Delta(v_1, \dots, v_d) \neq 0$ ssi $\{v_1, \dots, v_d\}$ = base de V
- $\Delta(v_1, \dots, v_d) = 0$ ssi $\{v_1, \dots, v_d\}$ est liée

Δ est multilinéaire : $\Delta(v_1, \dots, v_d)$ est linéaire en chacune des variable $v_1, \dots, v_d$

DÉFINITION 11.1. *Soit V un K-espace vectoriel et $n \geqslant 1$ un entier. Une forme multilineaire en n variables sur V est une application*

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} V^n & \mapsto & K \\ (v_1, \cdots, v_n) & \mapsto & \Lambda(v_1, \cdots, v_n) \end{array}$$

telle que pourtout choix de vecteurs $v_j \in V,\ j \leqslant d$, tout indice $i = 1, \cdots, n$ l'application Λ "restreinte a la i-ieme composante"

$$\Lambda_{(i)} : v \in V \mapsto \Lambda(v_1, \cdots, v, \cdots, v_n) \in K$$

est lineaire:

$$\Lambda(v_1, \cdots, \lambda.v + v', \cdots, v_n) = \lambda.\Lambda(v_1, \cdots, v, \cdots, v_n) + \Lambda(v_1, \cdots, v', \cdots, v_n).$$

L'ensemble des formes multilineaires en n variables sur V est note

$$\mathrm{Mult}^{(n)}(V) \text{ ou bien } (V^*)^{\otimes n} (\text{notation "produit tensoriel"}).$$

<u>Exemples</u> $n=1$ une forme multilinéaire en 1 variable = forme linéaire

$n=2$ $V=K^2$

$\vec{v}=(x,y)$ $\vec{v}'=(x',y')\in K^2$

$\vec{v}\wedge\vec{v}' := xy' - x'y$ Produit Alterné

\wedge

$$(\lambda\vec{v_1}+\vec{v_2})\wedge\vec{v}' = (\lambda x_1+x_2)y' - x'(\lambda y_1+y_2)$$

$$= \lambda(x_1y' - x'y_1) + x_2y' - x'y_2$$

$$= \lambda\,\vec{v_1}\wedge\vec{v}' + \vec{v_2}\wedge\vec{v}'$$

$$\vec{v} \wedge (\lambda \vec{v_1} + \vec{v_2}) = \lambda \vec{v} \wedge \vec{v_1} + \vec{v} \wedge \vec{v_2}$$

- Produit scalaire

$$\vec{v} \cdot \vec{v'} = (x,y)\cdot(x',y') := xx' + yy'$$

$$(\lambda \vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot \vec{v'} = \lambda \vec{v_1} \cdot \vec{v'} + \vec{v_2} \cdot \vec{v'}$$

$$\vec{v} \cdot (\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2}) = \lambda \vec{v} \cdot \vec{v_1} + \vec{v} \cdot \vec{v_2}$$

<u>Rmq:</u> $\vec{v} \wedge \vec{v'} = -\vec{v'} \wedge \vec{v}$

$$\vec{v'} \wedge \vec{v} = x'y - xy' = -(xy' - x'y)$$

$$= -\vec{v} \wedge \vec{v'}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v'} = \vec{v'} \cdot \vec{v}.$$

- K^d : On a aussi un produit scalaire

$\vec{v} = (v_1, \dots, v_d)$ $\vec{v'} = (v'_1, \dots, v'_d)$

$\vec{v} \cdot \vec{v'} = v_1 . v'_1 + \dots + v_d . v'_d$ est une forme bilinéaire

Tenseurs purs : $\ell_1, \dots, \ell_n \in V^*$

$$\ell_1 \otimes \ell_2 \otimes \dots \otimes \ell_n : (v_1, \dots, v_n) \in V^n \longmapsto \ell_1(v_1) \cdot \ell_2(v_2) \cdot \ldots \cdot \ell_n(v_n)$$

Comme les ℓ_i sont linéaire

$\ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_n$ est linéaire en chaque variable v_i

$$l_1 \otimes \dots \otimes l_n (\lambda v_1 + v_1', v_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$= l_1(\lambda v_1 + v_1') \, l_2(v_2) \, l_3(v_3) \dots l_n(v_n)$$

$$= \left(\lambda l_1(v_1) + l_1(v_1')\right) \cdot l_2(v_2) \, l_3(v_3) \dots l_n(v_n)$$

$$= \lambda l_1(v_1) \, l_2(v_2) \, l_3(v_3) \dots l_n(v_n)$$

$$+ l_1(v_1') \, l_2(v_2) \, l_3(v_3) \dots l_n(v_n)$$

THE WARNING

$$\ell_1 \otimes \cdots \otimes \ell_n : V^n \longrightarrow K$$

$$\neq \quad \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \cdots \cdot \ell_n : v \in V \longrightarrow \ell_1(v)\ell_2(v) \cdots \ell_n(v)$$

$n=2$ $\quad \ell_1 \otimes \ell_2 \neq \ell_2 \otimes \ell_1$

$$\ell_1 \otimes \ell_2 (v_1, v_2) = \ell_1(v_1)\ell_2(v_2) \qquad \ell_2 \otimes \ell_1 (v_1, v_2) = \ell_2(v_1)\ell_1(v_2)$$

Proposition 11.1. *L'ensemble* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V) = (V^*)^{\otimes n}$ *des formes multilineaires en* n *variables est un* K*-espace vectoriel quand on le muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelle pour les fonctions de* V^n *a valeurs dans* K*:* $\forall \Lambda, \Xi \in (V^*)^{\otimes n}$ *et pour* $\lambda \in K$*, la fonction*

$$(\lambda\Lambda + \Xi)(v_1, \cdots, v_n) = \lambda\Lambda(v_1, \cdots, v_n) + \Xi(v_1, \cdots, v_n)$$

est encore une forme multilineaire.

Exercice: faire le cas $n=2$.

Notations : B = base de V

$$B = \{e_1, \dots, e_d\} \quad B^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\} \subset V^*$$

$$\vec{J} = (j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, d\}^n \qquad j_i \in \{1, \dots, d\}$$
$$i = 1, \dots, n$$

on pose

$$e_{\vec{J}}^* := e_{j_1}^* \otimes e_{j_2}^* \otimes \dots \otimes e_{j_n}^* \in (V^*)^{\otimes n} = \mathrm{Mult}^{(n)}(V)$$

$$v_1 = x_{11} e_1 + \dots + x_{1d} e_d$$

$$\vdots$$

$$v_n = x_{n1} e_n + \dots + x_{nd} e_d$$

$$\vec{j} = (1, 2, \dots, n) \qquad (n \leq d)$$

$$e^*_{\vec{j}}(v_1, \dots, v_n) = x_{11} \cdot x_{22} \cdot \dots \cdot x_{nn}$$

$$\vec{j} = (1, 1, \dots, 1)$$

$$e^*_{\vec{j}}(v_1, \dots, v_n) = x_{11} \cdot x_{21} \cdot \dots \cdot x_{n1}$$

$$\vec{j} = (j_1, \ldots, j_n) \quad \vec{j}' = (j'_1, \ldots, j'_n) \quad j_i, j'_i \in \{1, \ldots, d\}$$

$$e^*_{\vec{j}}(e_{j'_1}, e_{j'_2}, \ldots, e_{j'_n})$$

$$= e^*_{j_1}(e_{j'_1}) \cdot e^*_{j_2}(e_{j'_2}) \cdot \ldots \cdot e^*_{j_n}(e_{j'_n})$$

$$= \delta_{j_1 = j'_1} \cdot \delta_{j_2 = j'_2} \cdot \ldots \cdot \delta_{j_n = j'_n} = \delta_{\vec{j} = \vec{j}'}$$

Théorème 11.1 (Dimension et base de l'espace des formes multilineaires). *Soit* $d = \dim V$, $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset V$ *une base et* $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ *la base duale. Alors* $V^{*\otimes n}$ *est de dimension finie egale a* d^n*; une base de* $V^{*\otimes n}$ *est donnee par l'ensemble des formes multilineaires de la forme*

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}}^* = \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \ \text{quand } \mathbf{j} = (j_1, \cdots, j_n) \text{ parcourent } \{1, \cdots, d\}^n.$$

On note cette base

$$(\mathscr{B}^*)^{\otimes n} = \{\mathbf{e}_{\mathbf{j}}^* = \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \ \mathbf{j} = (j_1, \cdots, j_n) \in \{1, \cdots, d\}^n\}.$$

Pour toute forme multilineaire en n *variables* $\Lambda \in (V^*)^{\otimes n}$*, on a la decomposition*

$$\Lambda = \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \cdots, d\}^n} \cdots \sum \Lambda(\mathbf{e}_{\mathbf{j}}) \mathbf{e}_{\mathbf{j}}^* \tag{11.1.1}$$

<u>Preuve</u> on veut mq

$\left\{ e^*_{\vec{j}} \quad \vec{j} \in \{1, \dots, d\}^n \right\}$ est libre et génératrice

Soit $\Lambda \in (V^*)^n$ on suppose que

$$\Lambda = \sum_{\vec{j}} x_{\vec{j}} \, e^*_{\vec{j}}$$

On évalue Λ en les

$$(e_{j_1'}, \dots, e_{j_n'}) \quad (j_1', \dots, j_n') \in \{1, \dots, d\}^n$$

$$\Lambda(e_{j_1'}, \dots, e_{j_n'}) = \sum_{\vec{j} \in \{1, \dots, d\}^n} x_{\vec{j}} \underbrace{e^*_{\vec{j}}(e_{j_1'}, \dots, e_{j_n'})}_{\delta_{\vec{j} = \vec{j}'}}$$

$$= x_{\vec{j}'}$$

$$\Lambda = \sum_{\vec{j} \in \{1,\dots,d\}^n} \Lambda(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) \cdot e^*_{(j_1,\dots,j_n)}$$

$\rightsquigarrow \left\{ e^a_{\vec{j}} \quad \vec{j} \in \{1,\dots,d\}^n \right\}$ et generatrice

a demontrer