

Structure des Espaces Vectoriels

SOFTPIA
www.softpia.com

Applications lineaires
et dimensions

DÉFINITION 8.1. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire. Le rang de φ est la dimension de $\text{Im } \varphi$:

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im } \varphi).$$

PROPOSITION 8.2 (Inégalité du rang). Soit V de dimension finie. On a

$$\text{rg}(\varphi) \leq \min(\dim V, \dim W).$$

THÉORÈME 8.1 (Noyau-Image). Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire avec V de dimension finie. On a

$$\dim V = \dim(\ker \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi).$$

COROLLAIRE 8.1 (Critere de bijectivite). Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre espaces de dimension finie. Si

$$\dim(V) = \dim(W)$$

alors est conditions suivantes sont equivalentes

- (1) φ est injective.
- (2) φ est surjective
- (3) φ est bijective.

THÉORÈME 8.2 (Dimension de l'espace des applications lineaires). *Si V et W sont de dimensions finies, alors $\text{Hom}_K(V, W)$ est de dimension finie*

$$\dim(\text{Hom}_K(V, W)) = \dim V \cdot \dim W.$$



DUALITY



SLIPKNOT TR1BUT3

Dualité

DÉFINITION 8.4. Une application linéaire, $\ell : V \mapsto K$, de V vers le corps K est appelée "forme linéaire". On note l'espace des formes linéaires par

$$V^* := \text{Hom}_{K\text{-ev}}(V, K)$$

et on l'appelle le dual de V .

PROPOSITION 8.3. Soit ℓ une forme linéaire. Si elle est non-nulle, i.e. $\ell \neq \underline{0}_K$, alors

$$\text{Im}(\ell) = K, \quad \dim(\ker \ell) = \dim(V) - 1.$$

DÉFINITION 8.3. Soit V de dimension finie. Un sous-espace vectoriel de dimension $\dim V - 1$ est appelé un hyperplan vectoriel.

PROPOSITION 8.4. Soit V de dimension finie et $H \subset V$ un hyperplan vectoriel. Il existe une forme linéaire ℓ_H telle que

$$\ker \ell_H = H.$$

formes coordonnées:

$$B = \{e_1, \dots, e_d\} = \text{base}$$

$$e_i^*: v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \mapsto x_i \in K$$

est une forme linéaire:

i -ième forme coordonnée de la base B .

THÉORÈME 8.3. Soit \mathcal{B} une base de V , la famille

$$\mathcal{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

est une base de V^* . On a

$$\forall i, j \leq d, \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i=j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

DÉFINITION 8.6. La base

$$\mathcal{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

s'appelle la base duale de la base \mathcal{B} .

COROLLAIRE 8.2. Soit $\ell : V \mapsto K$ une forme linéaire. On a

$$\ell = \sum_{i=1}^d \ell(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i^*.$$

Autrement dit, les coordonnées de ℓ dans la base \mathcal{B}^* sont données par les $(\ell(\mathbf{e}_i))_{i \leq d}$ (ie. les valeurs de ℓ en chacun des \mathbf{e}_i , $i \leq d$).

$$\begin{aligned} - \text{eval}_B: V^* &\longrightarrow K^d \\ \ell &\longrightarrow (\ell(e_1), \dots, \ell(e_d)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{CL}_B: K^d &\longrightarrow V \\ (x_1, \dots, x_d) &\longrightarrow x_1 \cdot e_1 + \dots + x_d \cdot e_d \end{aligned}$$

$$\text{CL}_B \circ \text{eval}_B: V^* \xrightarrow{\cong} V$$

$$v \in V \longrightarrow \text{eval}_v \in (V^*)^*$$
$$\text{eval}_v: l \in V^* \longrightarrow l(v) \in K$$

et un isomorphisme canonique
entre V et V^{**} .

Application lineaire
duale

DÉFINITION 8.8. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire. L'application duale φ^* de φ est l'application

$$\varphi^* : W^* \mapsto V^*$$

qui associe à une forme linéaire $\ell' : w \in W \mapsto \ell'(w) \in K$, la forme linéaire sur V obtenue par pré-composition par φ :

$$\varphi^*(\ell') := \ell' \circ \varphi : \begin{array}{l} V \mapsto K \\ v \mapsto \ell(\varphi(v)) \end{array}.$$

PROPOSITION 8.6. *L'application duale*

$$\varphi^* : \ell' \in W^* \mapsto \ell \circ \varphi \in V^*$$

est linéaire:

$$\varphi^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*).$$

THÉORÈME 8.4. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire entre deux espaces de dimensions finies.

(1) (Linearité) Montrer que l'application

$$\bullet^* : \varphi \in \text{Hom}(V, W) \mapsto \varphi^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$$

qui a une application linéaire associée l'application linéaire duale est elle-même linéaire:

$$(\lambda\varphi + \varphi')^* = \lambda\varphi^* + \varphi'^*$$

En d'autres termes

$$\bullet^* \in \text{Hom}(\text{Hom}(V, W), \text{Hom}(W^*, V^*)).$$

(2) (Anti-morphisme) Soit $\psi : W \mapsto Z$. Montrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

(3) (Involutive) Si le bi-dual V^{**} est identifié (canoniquement) à V via l'isomorphisme

$$\text{eval}_\bullet : v \in V \mapsto (\ell \mapsto \ell(v)) \in V^{**}$$

alors la duale de la duale qu'une application est l'application elle-même:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

Représentation paramétrique
/Cartésienne d'un SEV

Représentation paramétrique: $W \subset V$

si \mathcal{G}_W est génératrice de W

$$\mathcal{G}_W = \{e_1, \dots, e_g\} \subset W$$

$$W = \left\{ w \in V \text{ tq } w = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_g \cdot e_g \quad x_1, \dots, x_g \in K \right\}$$

PROPOSITION 8.7 (Representation cartésienne d'un SEV). Soit $W \subset V$ un SEV (distinct de V). Il existe un entier $d' \geq 1$ et une famille de d' formes linéaires

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_{d'}\} \subset V^*$$

telles que

$$W = \{w \in V \text{ tels que } \ell_1(w) = 0, \ell_2(w) = 0, \dots, \ell_{d'}(w) = 0\}.$$

De manière équivalente, $W = \ker \varphi_{\mathcal{L}}$ avec

$$\varphi_{\mathcal{L}} : w \in V \mapsto (\ell_1(w), \dots, \ell_{d'}(w)) \in K^{d'}.$$

En fait on peut prendre $d' = d_V - d_W$ et la famille

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_{d_V - d_W}\} \subset V^*$$

forment une famille libre de V^* (ie. les ℓ_i , $i \leq d_V - d_W$ sont linéairement indépendantes).

Rang de la Duale

THÉORÈME 8.5. Soit $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$ et $\varphi^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*)$ sa duale. On a

$$\text{rg}(\varphi^*) = \text{rg}(\varphi).$$

DÉFINITION 8.10. Soit $U \subset V$ un SEV. Son sous-espace annihilateur (ou orthogonal) est le sous-espace de l'espace dual défini par

$$U^\perp := \{l \in V^*, \forall u \in U, l(u) = 0_K\} \subset V^*.$$

Reciproquement si $U^* \subset V^*$ est un SEV de l'espace dual, son orthogonal $U^{*\perp}$ dans V est le SEV défini par

$$U^{*\perp} = \{v \in V, \forall l \in U^*, l(v) = 0\} \subset V.$$

Rem: (pourquoi \perp ?) Soit \mathbb{R}^n on a produit
scalaire euclidien $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{v}' = (x'_1, \dots, x'_n)$
 $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle_n = \sum_{i=1}^n x_i x'_i$
on dit que $\vec{v} \perp \vec{v}'$ si $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 0$

Pour V et V^* on dispose de l'accouplement
canonique "pairing"

$$V^* \times V \longrightarrow K$$

$$(l, v) \longrightarrow l(v) = \text{eval}_V(l) = \langle l, v \rangle_{V, \text{can}}$$

$$U^\perp = \{ l \in V^* \mid \forall u \in U \langle l, u \rangle = 0 \}$$

$$U^{*\perp} = \{ v \in V \mid \forall l \in U^* \langle l, v \rangle = 0 \}$$

PROPOSITION 8.7. Soit $U^\perp \subset V^*$ l'orthogonal de U alors

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

Preuve: Soit $B_U = \{e_1, \dots, e_d\}$ = base de U

$B = \{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$ une base complétée

$$\downarrow$$
$$B^\perp = \{e_1^\perp, \dots, e_d^\perp, e_{d+1}^\perp, \dots, e_n^\perp\}$$

$$\Rightarrow U^\perp = \text{Vect}(\{e_{d'+1}^z, \dots, e_d^z\})$$

$$\text{si } v \in U \Rightarrow \forall i = d'+1, \dots, d$$

$$e_i^z(v) = 0$$

$$\text{Vect}(\{e_{d'+1}^z, \dots, e_d^z\}) \subset U^\perp$$

$$\text{si } l \in U^\perp \Rightarrow \forall i = 1, \dots, d' \quad l(e_i) = 0$$

$$l = \sum_{i=1}^d l(e_i) \cdot e_i = \sum_{i=d'+1}^d l(e_i) \cdot e_i \in \text{Vect}(\{e_{d'+1}^z, \dots, e_d^z\})$$

LEMME 8.1. Soit $U, U' \subset \mathcal{V}$ des SEVs d'un espace vectoriel \mathcal{V} alors

$$U^\perp \subset U'^\perp \implies U \supset U'.$$

Preuve: Exercice



$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}, \vec{v}') \mapsto \langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = \vec{v} \cdot \vec{v}'$$

donne un isom entre \mathbb{R}^n et $(\mathbb{R}^n)^*$

$$\vec{v} \mapsto \left(\vec{v}' \mapsto \langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle \right)$$

$$\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \quad \langle , \rangle \text{ est non d\u00e9g\u00e9n\u00e9r\u00e9}$$

THÉORÈME 8.5. Soit $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$ et $\varphi^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*)$ sa duale. On a
 $\text{rg}(\varphi^*) = \text{rg}(\varphi)$.

Preuve: Il suffit de mg

$$\text{Im}(\varphi^*) = (\ker \varphi)^\perp \subset V^*$$

$$\leadsto \dim(\varphi^*) = \dim V - \dim \ker \varphi = \dim \text{Im}(\varphi)$$

$$\subset: \text{ soit } \ell \in \text{Im}(\varphi^*) \leadsto \ell = \ell' \circ \varphi \\ \ell' \in W^*$$

$$\forall v \in \ker \varphi \quad \ell(v) = \ell(\varphi(v)) = \ell(0) = 0_K$$

\Rightarrow : il suffit de mq

$$\text{Im}(\varphi^2)^\perp \subset (\ker \varphi)^{\perp\perp} = \ker \varphi$$

$$\text{Soit } v \in \text{Im}(\varphi^2)^\perp \rightsquigarrow \forall \ell \in \text{Im} \varphi^2 \\ \ell(v) = 0$$

$$\rightsquigarrow \forall l' \in W^* \quad l'(\varphi(v)) = 0$$

$\Rightarrow \varphi(v) = 0$: $\varphi(v)$ a toutes ses coordonnées dans une base qui sont nulles.



Bases Elementaires

$$V, W \quad \dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim V \times \dim W$$

$$B = \{e_1, \dots, e_d\} \quad B' = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$$

" " " "

$$\{e_j \mid j=1, \dots, d\} \quad \{f_i \mid i=1, \dots, d'\}$$

$$B^{\#} = \{e_1^{\#}, \dots, e_d^{\#}\} \quad B'^{\#} = \{f_1^{\#}, \dots, f_{d'}^{\#}\}$$

$i \in \{1, \dots, d'\}$ $j \in \{1, \dots, d\}$ on définit

$$\varepsilon_{ij} : v \in V \longrightarrow e_{\sigma}^k(v) \cdot f_i \in W$$

On dispose de $d \times d'$ applications ε_{ij}

LEMME 8.2. L'application $\mathcal{E}_{ij} : V \mapsto W$ est linéaire, de rang 1, d'image $K.f_i$ et de noyau

$$\ker \mathcal{E}_{ij} = \langle \mathcal{B} - \{e_j\} \rangle = K.e_1 + \cdots + K.e_{j-1} + K.e_{j+1} + \cdots + K.e_d$$

l'hyperplan vectoriel engendré par les vecteurs de la base \mathcal{B} moins le vecteur e_j .

Preuve : l'application $e_j^k : V \rightarrow K$ est linéaire $\neq 0$
et donc $e_j \cdot f_i$ est linéaire
d'image $K \cdot f_i$
et $\ker \mathcal{E}_{ij} = \ker(e_j^k)$ \square

DÉFINITION 8.11. Soit V, W des K -EV de dimensions finies d, d' et

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\} \text{ et } \mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d'}\}$$

des bases de V et W et $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ la base duale de \mathcal{B} .

Pour $i \leq d', j \leq d$ les applications linéaires définies par

$$\mathcal{E}_{i,j} : v \in V \mapsto \mathbf{e}_j^*(v) \cdot \mathbf{f}_i \in W$$

sont appelées applications linéaires élémentaires associées aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

THÉORÈME 8.6 (Une base de l'espace des applications linéaires). La famille des applications linéaires élémentaires

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} := \{\mathcal{E}_{i,j}, i \leq d', j \leq d\} \subset \text{Hom}_{K\text{-ev}}(V, W)$$

forme une base de $\text{Hom}_{K\text{-ev}}(V, W)$.

Base élémentaire associé aux bases $\mathcal{B}', \mathcal{B}$

Preuve: $B_{B',B}$ est génératrice.

Soit $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ou $v \mapsto \varphi(v)$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^d m_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}$$

Supposons $\varphi \equiv \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^d m_{ij} \varepsilon_{ij}$ et calculons les m_{ij}

On calcule $\varphi(e_j) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^d m_{ij} \Sigma_{ij}(e_j)$

$$\Sigma_{ij}(e_j) = e_j^2(e_j) \cdot \delta_i = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$= \delta_i \quad \text{si } i = j$$

$$\varphi(e_j) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^d m_{ij} \delta_i$$

W

$\varphi(e_{j'}) \in W$ se decompose en CL de B'

$$\varphi(e_{j'}) = \sum_{i=1}^d f_i(\varphi(e_{j'})) f_i$$

\Rightarrow si $\varphi = \sum_{i=1}^d m_{ij'} \varepsilon_{i,r}$ alors $\forall i, j'$

$$m_{ij'} = f_i(\varphi(e_{j'})) \in K$$

Soit $\tilde{\varphi} = \sum_i \sum_j f_i^{\alpha}(\varphi(y_j)) \varepsilon_{ij}$

mq $\tilde{\varphi} = \varphi$, il suffit de mq

$\forall j=1, \dots, d$ $\tilde{\varphi}(y_j) = \varphi(y_j)$ mais on a que

(ou refaisant le calcul) $\tilde{\varphi}(y_j) = \sum_i f_i^{\alpha}(\varphi(y_j)) f_i = \varphi(y_j)$

□

Cette base nous donne des isomorphismes

$$CL_{B, B', B} : (K^{d'})^d \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W)$$

$$(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}} \mapsto \sum_i \sum_j m_{ij} \varepsilon_{ij}$$

l'inverse de cet isomorphisme

$$\text{eval}_{B, B', B} : \varphi \in \text{Hom}(V, W) \longrightarrow \left(\rho_i(\varphi(y_j))_{i \leq d, j \leq d} \right) \in (K^{d \times d})$$

$$\text{mat}_{B', B}(\varphi) = \text{eval}_{B, B', B}(\varphi) = \text{matrice de } \varphi$$

relative aux

bases B, B'

$$\text{matrice} = \text{element de } (K^{d'})^d = \underbrace{K^{d'} \times K^{d'} \times \dots \times K^{d'}}_{d \text{ fois.}}$$

DÉFINITION 8.12. L'ensemble des d' scalaires $(m_{i,j})_{i \leq d', j \leq d}$ donnés par

$$(8.4.2) \quad m_{i,j} = \mathbf{f}_i^*(\varphi(\mathbf{e}_j)).$$

sont les coefficients de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ ou encore la matrice de φ relative aux bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' .

Exemple: $V = \mathbb{R}^3$ $W = \mathbb{R}^2$ \mathcal{B}_3^0 \mathcal{B}_2^0

$$\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, y + 3z)$$

On dispose de 6 appl lin élémentaires

$$\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{23}$$

$$\varphi = 2\varepsilon_{11} + 4\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} + 3\varepsilon_{23}$$

$$\varphi(1,0,0) = (2,0) \quad \varphi(0,1,0) = (4,1) \quad \varphi(0,0,1) = (0,3)$$

Proprietes fonctionnelles des
Coefficients.

Image d'un vecteur

PROPOSITION 8.9. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire et $(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$ les coordonnées de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$. Alors pour $k = 1, \dots, d$ le d' -uplet

$$(m_{i,k})_{i \leq d'}$$

sont les coordonnées de $\varphi(\mathbf{e}_k)$ dans la base \mathcal{B}' :

$$(8.5.1) \quad \varphi(\mathbf{e}_k) = \sum_{i \leq d'} m_{ik} \mathbf{f}_i.$$

Soit $v = \sum_{j=1}^d x_j \mathbf{e}_j \in V$, alors on a

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{d'} y_i \mathbf{f}_i \text{ avec } y_i = \sum_{j=1}^d m_{ij} \cdot x_j.$$

Preuve: $\varphi = \sum_{i,j} m_{ij} \mathbf{E}_{ij}$

$$\varphi(e_k) = \sum_{i=1}^d m_{ij} \varepsilon_{ij}(e_k)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(e_k) &= 0 \quad \text{if } j \neq k \\ &= f_i \quad \text{if } j = k \\ &= \sum_{i=1}^{d'} m_{ik} f_i \end{aligned}$$

$$v = \sum_{j=1}^d x_j e_j \quad \varphi(v) = \sum_{j=1}^d x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^d x_j \left(\sum_{i=1}^{d'} m_{ij} f_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^{d'} f_i \left(\sum_{j=1}^d x_j m_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{d'} \left(\sum_{j=1}^d m_{ij} x_j \right) f_i$$



CLs d'ALs

PROPOSITION 8.10. Soit

$$\varphi, \psi : V \mapsto W$$

deux applications lineaires et $(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$, $(n_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$ leurs coordonnees dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$. Pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \cdot \varphi + \psi$ est lineaire et ses coordonnees dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ sont donnees par

$$(\lambda \cdot m_{ij} + n_{ij})_{i \leq d', j \leq d}.$$

Preuve: les fct coord ds la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$
sont des formes lineaires sur $\text{Hom}(V, W)$
 \square

Composition d'ALS

$$\begin{array}{ccc} \varphi: U \rightarrow V & \psi: V \rightarrow W & \\ \downarrow & & \\ B = \{e_k \mid k=1, \dots, d\} & B' = \{f_d \mid d=1, \dots, d'\} & \\ \cup & & \cup \\ & B'' = \{g_i \mid i=1, \dots, d''\} & \\ & \cup & \\ & W & \end{array}$$

$$B_{B', B} \subset \text{Hom}(U, V)$$

$$B_{B'', B'} \subset \text{Hom}(V, W)$$

$$B_{B'', B} \subset \text{Hom}(U, W)$$

$$\begin{array}{l} \varphi \rightsquigarrow (n_{dk})_{d \leq d', k \leq d} \\ \psi \rightsquigarrow (m_{ij})_{i \leq d'', d \leq d'} \end{array} \quad \psi \circ \varphi \rightsquigarrow (l_{ik})_{\substack{i \leq d'' \\ k \leq d}}$$

THÉORÈME 8.7. Soient $(n_{jk})_{j \leq d', k \leq d}$ les coordonnées de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ et $(m_{ij})_{i \leq d'', j \leq d'}$ les coordonnées de ψ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}$. Alors les coordonnées $(l_{ik})_{i \leq d'', k \leq d}$ de $\psi \circ \varphi$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}$ sont données par

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}.$$

Preuve:

$$\varphi = \sum_{d, k} n_{dk} \varepsilon_{dk} = \sum_{d, k} n_{dk} e_k^* \cdot \rho_d$$

$$\psi = \sum_{i, d} m_{id} \rho_d^* \cdot g_i$$

$$\psi_0(\varphi(e_k)) = \left(\sum_{i,j} m_{ij} f_j^* \cdot g_i \right) \left(\sum_{j'=1}^{d'} n_{j'k} f_{j'} \right)$$

$$= \sum_i g_i \left(\sum_j m_{ij} f_j \left(\sum_{j'=1}^{d'} n_{j'k} f_{j'} \right) \right)$$

$$= \sum_i g_i \left(\sum_j m_{ij} \cdot n_{jk} \right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j m_{ij} \cdot n_{jk} \right) g_i \quad \square$$

Coefficients de la Duale

$$\varphi: V \rightarrow W$$

$$B \subset V$$

$$B' \subset W$$

$$(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

$$\varphi^t: W^* \rightarrow V^*$$

$$B'^* \subset W^*$$

$$B^* \subset V^*$$

$$(m_{ji}^*)_{\substack{j \leq d \\ i \leq d'}}$$

THÉORÈME 8.8. Soit $\varphi : V \rightarrow W$ une application linéaire et $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ l'application linéaire duale; soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' des bases de V et W et $(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$ les coefficients de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$; soient $(m_{ji}^*)_{j \leq d, i \leq d'}$ les coefficients de φ^* dans la base

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*} \subset \text{Hom}(W^*, V^*)$$

associée aux bases duales $\mathcal{B}^* \subset V^*$ et $\mathcal{B}'^* \subset W^*$. On a

$$m_{ji}^* = m_{ij}, \quad i \leq d', \quad j \leq d.$$

$(m_{ji}^*)_{\substack{j \leq d \\ i \leq d'}}$, les coeffs de φ^*

$$\varphi^*(f_i) = \sum_{j=1}^d m_{ji}^* e_j^* \in V^*$$

ou calcul $\varphi^*(f_i)(e_j^*) = m_{ji}^*$

outcome

$$\varphi^*(f_i^*)(e_{j'}) = f_i^*(\varphi(e_{j'})) = m_{ij'}$$



- *M: Do you know what I'm talking about ?*

- *N: The Matrix ?*

- *M: Do you want to know what IT is ?*

*The Matrix is everywhere. It is all around us.
Even now, in this very room.*

V
 \cup
 B W
 \cup
 B' $\text{Hom}(V, W)$
 \cup
 $B_{B'B}$

$$CL_B: K^d \xrightarrow{\sim} V$$

$$CL_{B'}: K^{d'} \xrightarrow{\sim} W$$

$$CL_{B_{B'B}}: (K^{d'})^d = \underbrace{K^{d'} \times \dots \times K^{d'}}_{d \text{ fois}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W)$$

$$\mathcal{Q} \rightarrow (m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

On représente la famille de coef sous forme
de tableau ^{a d' d' entrées} appelé matrice
ie. une famille de d vecteurs de
l'espace $K^{d'}$.

DÉFINITION 9.1. L'espace vectoriel $(K^{d'})^d$ s'appelle l'espace des matrices de dimension $d' \times d$ à coefficients dans K et est noté

$$M_{d' \times d}(K) = \{(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}, m_{ij} \in K\}.$$

Un élément de $M_{d' \times d}(K)$ est appelé matrice de dimensions $d' \times d$ ou juste une matrice $d' \times d$.

$$M = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & m_{ij} & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}$$

 **W/ THE WARNING** 

par la représentation habituelle
d'un plan de dim 2

DÉFINITION 9.2. Soient $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B}' \subset W$ des bases comme ci-dessous et $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \subset \text{Hom}(V, W)$ la base de $\text{Hom}(V, W)$ associée. L'application réciproque $CL_{\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}}^{-1}$ sera également notée

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} : \text{Hom}(V, W) \mapsto M_{d' \times d}(K).$$

Explicitement, si on a la décomposition $\varphi = \sum_{i \leq d'} \sum_{j \leq d} m_{ij}(\varphi) \mathcal{E}_{ij}$ alors on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij}(\varphi))_{i \leq d', j \leq d} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{d} \\ \\ \\ \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} \end{matrix}$$

La matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi)$ est appelée matrice associée à φ dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Rappelons que pour tout $1 \leq j \leq d$, $(m_{i,j}(\varphi))_{i \leq d'}$ est l'ensemble des coordonnées de l'image $\varphi(\mathbf{e}_j)$ de $\mathbf{e}_j \in \mathcal{B}$ dans la base \mathcal{B}' : ie.

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d'} m_{ij}(\varphi) \mathbf{f}_i.$$

Example: $V = \mathbb{R}^3$ $W = \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, y + 3z)$$

$$\varphi = 2\varepsilon_{11} + 0\varepsilon_{21} + 4\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} + 0\varepsilon_{13} + 3\varepsilon_{23}$$

$$\text{mat}_{B_2, B_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice Nulle:

$$\mathbb{O}_{d' \times d} = (0)_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

Matrices Elementaires

$$E_{ij} = \text{mat}_{B'B}(\Sigma_{ij})$$

$$(E_{ij})_{k,l} = \delta_{k=i} \cdot \delta_{l=j}$$

E_{ij} = matrice dont tous les coeffs sont 0 sauf le (i,j) -ieme qui vaut 1.

Matrices Carrées: $\dim V = \dim W = d$

$$M_{d \times d}(K) \cong M_d(K)$$

$$= \left\{ \left. \begin{pmatrix} m_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{dd} \end{pmatrix} \right\}^d \quad m_{ij} \in K \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_d \quad V=W$

Matrice Identité: $V=W$ $\varphi = \text{Id}_V$

$$B' = B$$

$$\text{mat}_{BB}(\text{Id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_d$$

Si $B' \neq B$

$\text{mat}_{B'B}(\text{Id}_V)$ n'est pas la
matrice Id_d .

 **⚡ THE WARNING ⚡** 

Matrices Scalaires

$$V=W$$

$$\varphi = \lambda \cdot \text{Id}_V$$

$$B=B'$$

$$\text{mat}_{BB'}(\lambda \text{Id}_V) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \text{Id}_d$$

Matrices Colomnes $\dim V = 1$

$$M_{d' \times 1}(K) = K^{d'} = \left\{ \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{d',1} \end{pmatrix} \mid m_{i,1} \in K \right\}$$
$$= \text{Col}_{d'}(K)$$

Matrices lignes: $\dim W = 1$

$$M_{1 \times d}(K) = \text{Lig}_d(K) = \left\{ (m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1d}) \mid m_{1j} \in K \right\}$$

DÉFINITION 9.3. Soient $\mathcal{B} \subset V$ une base. Soit

$$v = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + x_d \cdot \mathbf{e}_d \in V$$

un vecteur décomposé dans la base \mathcal{B} . Alors les matrices

$$\text{Col}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \text{Lig}_{\mathcal{B}}(v) = (x_1 \quad \cdots \quad x_d)$$

sont appelées respectivement

- la matrice colonne associée à v dans la base \mathcal{B} ,
- La matrice ligne associée à v dans la base \mathcal{B} ,

Ces applications sont des isomorphismes entre V et $\text{Col}_d(K)$ et $\text{Lig}_d(K)$.

Structure des Espaces de Matrices

Addition et \times par des Scalars

$$M = (m_{ij}) \quad N = (n_{ij}) \quad \lambda \in K$$

\uparrow
 $M_{d \times d}(K)$

$$\lambda M + N = (\lambda m_{ij} + n_{ij})_{ij} \in M_{d \times d}(K)$$

$M_{d \times d}(K)$ est un K -ev de dim d^2 .

Multiplication de Matrices

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

$$B = \{e_1, \dots, e_d\} \quad B' = \{f_1, \dots, f_{d'}\} \quad B'' = \{g_1, \dots, g_{d''}\}$$

$$\varphi: U \rightarrow V \quad \psi: V \rightarrow W$$

$$N = \text{mat}_{B'B}(\varphi) \quad M = \text{mat}_{B''B'}(\psi)$$

$$N = (n_{ij})$$

$$M = (m_{jk})$$

$$L = \text{mat}_{B'' B'}(\psi \circ \varphi) = (l_{ik})_{\substack{i \leq d'' \\ k \leq d}}$$

also

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}$$

THÉORÈME 8.7. Soient $(n_{jk})_{j \leq d', k \leq d}$ les coordonnées de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ et $(m_{ij})_{i \leq d'', j \leq d'}$ les coordonnées de ψ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}$. Alors les coordonnées $(l_{ik})_{i \leq d'', k \leq d}$ de $\psi \circ \varphi$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}$ sont données par

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}.$$

DÉFINITION 9.5. Soient $d, d', d'' \geq 1$ et $M \in M_{d' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$, on définit le produit des matrices M et N comme étant la matrice

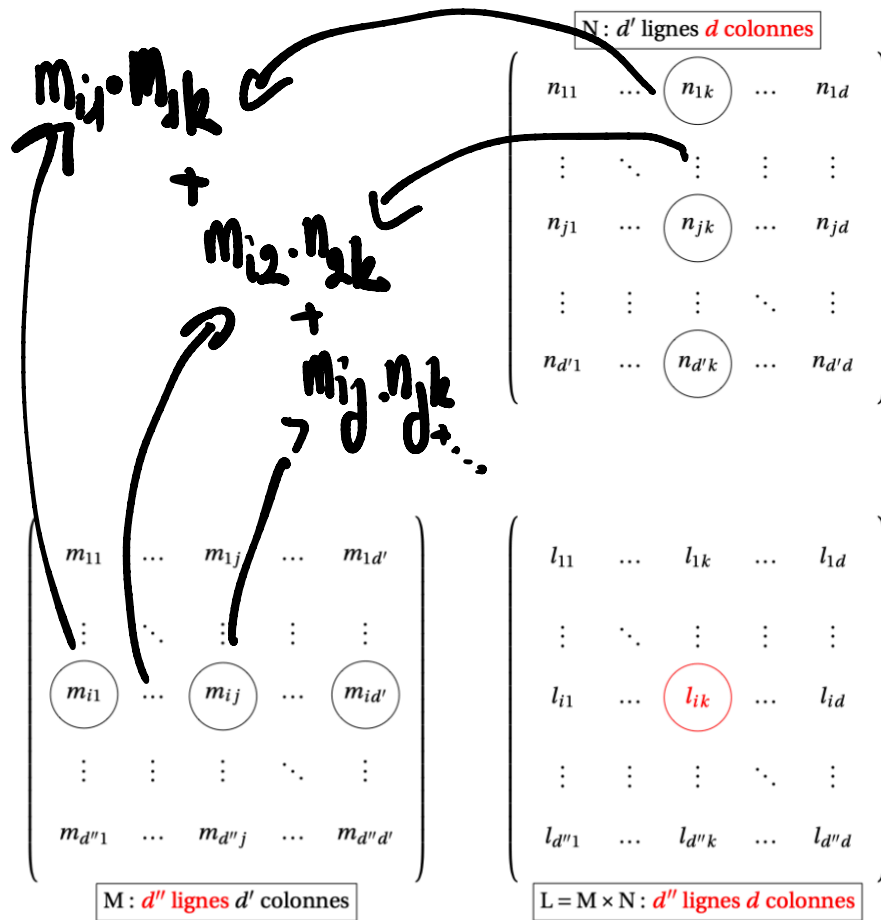
$$L := M.N \in M_{d'' \times d}(K)$$

avec

$$L = (l_{ik})_{i \leq d'', k \leq d} \in M_{d'' \times d}(K) \text{ et } l_{ik} := \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}.$$

Soient $d, d', d'' \geq 1$, on a donc défini une application "produit de matrices"

$$(9.2.1) \quad \bullet \bullet : \begin{array}{ccc} M_{d'' \times d'}(K) \times M_{d' \times d}(K) & \mapsto & M_{d'' \times d}(K) \\ (M, N) & \mapsto & L = M.N \end{array}$$



Example: $\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, y + 3z)$ N

$$\psi(s, t) = (3s + t, s + t)$$
 M

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi: (x, y, z) &\rightarrow (6x + 13y + 3z, 2x + 5y + 3z) \\ &= (3(2x + 4y) + y + 3z, 2x + 4y + y + 3z)\end{aligned}$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M.N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 13 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 9.1 (Propriétés fonctionnelles du produit de matrices). Soient $d, d', d'' \geq 1$ et $M_{d'' \times d'}(K)$, $M_{d' \times d}(K)$, $M_{d'' \times d}(K)$ les espaces de matrices correspondants.

L'application "produit de matrices"

$$\begin{aligned} M_{d'' \times d'}(K) \times M_{d' \times d}(K) &\mapsto M_{d'' \times d}(K) \\ (M, N) &\mapsto M.N \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes

(1) *Distributive à gauche*: pour $\lambda \in K$, $M, M' \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$,

$$(\lambda.M + M').N = \lambda.M.N + M'.N.$$

(2) *Distributive à droite*: pour $\lambda \in K$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N, N' \in M_{d' \times d}(K)$,

$$M.(\lambda.N + N') = \lambda.M.N + M.N'.$$

(3) *Neutralité de l'identité*: pour $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\text{Id}_{d''}.M = M, M.\text{Id}_{d'} = M$$

(4) *La matrice nulle est absorbante*: pour $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\underline{0}_{d'' \times d''}.M = \underline{0}_{d'' \times d'}, M.\underline{0}_{d' \times d} = \underline{0}_{d'' \times d}.$$

(5) *Associativité*: Soit $d''' \geq 1$ et $L \in M_{d''' \times d''}(K)$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$ alors

$$(L.M).N = L.(M.N) \in M_{d''' \times d}(K)$$

THÉORÈME 9.2. Soit U, V, W des espaces vectoriels de dimensions d, d', d'' et $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases. Soient des applications linéaires

$$\varphi : U \mapsto V, \quad \psi : V \mapsto W.$$

On note les coefficients des matrices de φ, ψ et $\psi \circ \varphi$ dans les bases adéquates par

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) &= (n_{jk})_{jk}, & \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(\psi) &= (m_{ij})_{ij} \\ \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\psi \circ \varphi) &= (l_{ik})_{ik} \end{aligned}$$

alors on a

$$(9.2.2) \quad \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\psi \circ \varphi) = \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(\psi) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi)$$

Autrement dit on a

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1d} \\ l_{21} & \cdots & l_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{d''1} & \cdots & l_{d''d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d'} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d''1} & m_{d''2} & \cdots & m_{d''d'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1d} \\ n_{21} & \cdots & n_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ n_{d'1} & \cdots & n_{d'd} \end{pmatrix}$$

Images de Vecteurs

PROPOSITION 9.1. Soit $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B}' \subset W$ des bases, $v \in V$ un vecteur de coordonnées $(x_j)_{j \leq d}$ dans la base \mathcal{B} (ie. $v = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + x_d \cdot \mathbf{e}_d$) et $(y_i)_{i \leq d'}$ les coordonnées de $\varphi(v)$ dans la base \mathcal{B}' (ie. $\varphi(v) = y_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + y_{d'} \cdot \mathbf{f}_{d'}$). On associe à v et $\varphi(v)$ leurs matrices colonnes (de hauteurs d et $d' =$

$$\text{Col}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \text{Col}_{\mathcal{B}'}(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix}$$

alors on a la relation

$$\text{Col}_{\mathcal{B}'}(\varphi(v)) = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) \cdot \text{Col}_{\mathcal{B}}(v).$$

Autrement dit si $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$, on a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

Example: $\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, y + 3z)$

$v = (1, 1, 1)$ $\varphi(1, 1, 1) = (6, 4)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$