Math 110 : Algebre Lineaire Avancee

Cardinal d'un ensemble

Déf: Soient X et Y des ensembles. On dit que X et Y ont m̂ cardinal et on le note $|X| = |Y|$ si il existe une bijection $f : X \simeq Y$.

PROPOSITION 1.2. *La relation "avoir le meme cardinal" a la proprietes suivantes*

(1) *Reflexivite:* $|X| = |X|$
(2) *Symetrie:* $|X| = |Y| \Longrightarrow |Y| = |X|$,
(3) *Transitivite:* $|X| = |Y|$ *et* $|Y| = |Z| \Longrightarrow |X| = |Z|$.

Consequence: le cardinal de X, $|X|$ est la catergorie des ensembles Y tels que $X \simeq Y$.

$$|X| = \{ Y \in ENS \quad X \simeq Y \}$$

On a alors que

$$X \in |X| \,,\; Y \in |X| \iff X \in |Y|$$

$$\text{et } Z \in |Y| \text{ et } Y \in |X| \implies Z \in |X|$$

$\Rightarrow$ la categorie des ENBs est partionnée en ss-categories d'ensemble ayant tous le m̂ cardinal.

Ensembles finis, infinis, dénombrables

DÉFINITION 1.11. *Un ensemble X est fini si il est soit vide, soit en bijection avec un ensemble de la forme $n = \{0, \cdots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ un entier $\geqslant 1$. On ecrit alors*

$$|\emptyset| = 0, \ |X| = n.$$

Un ensemble est infini sinon et on ecrit alors $|X| = \infty$.

$f : X \simeq \{0, \dots, n-1\}$

la reciproque $f^{-1} : \{0, \dots, n-1\} \xrightarrow{\sim} X$

realise une enumeration des elts de X

: on pose $x_1 = f^{-1}(0)$, $x_2 = f^{-1}(1)$, $\dots$, $x_n = f^{-1}(n-1)$

et on a $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Définition 1.12. *Un ensemble X est denombrable si il est fini ou si il a le meme cardinal que $\mathbb{N}$. Un ensemble est indenombrable sinon.*

Ex : $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ $k \geq 1$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{\geq 1},\ (p,q) = 1 \right\}$$

Théorème 1.1 (Cantor). *Si X est denombrable alors $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. Si X est denombrable et infini alors $\mathscr{P}(X)$ n'est pas denombrable.*

$$(0) \quad \mathcal{P}(X) \simeq \{0,1\}^X = \mathcal{F}(X,\{0,1\})$$

$$1. : \quad A \subset X \longrightarrow 1_A : x \in X \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

$$1. : \quad \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \{0,1\}^X$$

Cor: X fini $|X| = n$ $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

2 Comme $X \simeq \mathbb{N}$ ops $X = \mathbb{N}$

Absurd: $f_0 : n \longrightarrow f_n : m \longrightarrow f_n(m) \in \{0, 1\}$

f_0 bijection

③ $f_C : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$

$$f_C(n) := 1 - f_n(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_n(n) = 1 \\ 1 & \text{si } f_n(n) = 0 \end{cases}$$

Par suite $f_C = f_{n_0}$ pour un unique n_0

$$f_C(n_0) = 1 - f_{n_0}(n_0) = 1 - f_C(n_0)$$

$2 f_C(n_0) = 1$ impossible $\boxtimes$

<u>Cor:</u> $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

$[0,1)$ n'est pas dénombrable.

dev_2 : $x \in [0,1) \longrightarrow (c_n(x))_{n \geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

- $x = x_0 \in [0,1)$ $\quad c_0 = \underset{\{0,1\}}{\underset{\cap}{[2x_0]}}$ $\quad x_1 = 2x_0 - \underset{\{2x_0\}}{\underset{\parallel}{[2x_0]}}$

on recommence avec x_1

$\frac{8}{10} = 0{,}_2 1100 1100 \underline{1100}$

si $\left(c_n(x)\right)_{n\geq 0}$ est le dev en base 2 de x

on a $x = \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{8} + \dots + \frac{c_n}{2^{n+1}}$

$+ \dots$

$$\mathrm{dev}_2 : [0,1) \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

⚠ Pas $\twoheadrightarrow$:

$\mathrm{dev}_2([0,1))$ = les suite de 0 et 1 qui ultimement ne sont pas constantes egales a 1

Ex : $0_2 101011111\underline{1} \notin \mathrm{dev}_2([0,1))$

l'ensemble des suite qui se terminent ultiment pas des 1 est denombrable

soit $(c_n)_{n\geq 0}$ tq si $n \geq n_0$ alors

$c_n = 1$

$$x = \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{4} + \dots + \frac{c_{n_0-1}}{2^{n_0}} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}}_{= \frac{1}{2^{n_0}}}$$

$$\frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2}$$

x est de forme $\dfrac{p}{2^{n_0}}$ avec $0 \leqslant p \leqslant 2^{n_0}$

$\mathrm{Dev}_2([0,1)) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — un ensemble dénombrable

Lemme 1.2. *Soit X un ensemble et $A \subset X$ un sous-ensemble denombrable alors*

$$X \text{ est denombrable } \iff X - A \text{ est denombrable }.$$

$\square$

Le Thm de Cantor-Bernstein – Schroeder

Proposition 1.1. *Soient X et Y des ensembles finis possedant respectivement $|X|$ et $|Y|$ elements et $f : X \mapsto Y$ une application entre ces ensembles. On a les proprietes suivantes*

- *Si $f : X \hookrightarrow Y$ est injective alors $|X| \leqslant |Y|$.*
- *Si $f : X \twoheadrightarrow Y$ est surjective alors $|X| \geqslant |Y|$.*
- *Si $f : X \hookrightarrow Y$ est injective et $|X| \geqslant |Y|$ alors $|X| = |Y|$ et f est bijective.*
-
- *Si $f : X \twoheadrightarrow Y$ est surjective et $|X| \leqslant |Y|$ alors $|X| = |Y|$ et f est bijective.*

Rmq : on peut raisonner par contraposée.

Définition 1.12. *Soient X et Y deux ensembles. Si il existe une application injective entre X et Y, $\phi : X \hookrightarrow Y$, on dit que le cardinal de X est plus petit que celui de Y et on note cette relation $|X| \leqslant |Y|$. Si de plus $|X| \neq |Y|$, on le note $|X| < |Y|$.*

la relation $\leq$ est reflexive

$|X| \leq |X|$ et transitive

$|X| \leq |Y|$ et $|Y| \leq |Z|$

alors $|X| \leq |Z|$

est ce que $\leq$ est antisymetrique?

est ce que

$|X| \leq |Y|$ et $|Y| \leq |X|$

$\Longrightarrow |X| = |Y|$?

THE WARNING

Oui! est c'est assez dur
a demontrer

Théorème (Cantor-Bernstein-Schroeder). *Soit X et Y deux ensembles (pas necessairement finis). Si il existe une injection $\phi : X \hookrightarrow Y$ et une injection $\psi : Y \hookrightarrow X$ alors il existe une bijection $\varphi : X \simeq Y$. En d'autre termes*

$$|X| \leqslant |Y| \text{ et } |Y| \leqslant |X| \Longleftrightarrow |X| = |Y|.$$

Hypothese du continu

Q (Cantor): on sait que $\mathbb{R}$ est pas denombrable

et donc $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$,

Est ce qu'il existe $\mathcal{N}_1$ tq

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{N}_1| < |\mathbb{R}| \quad ?$$

Hypothese du Continu : $\mathbb{R}$ est bien le + petit

dans la Theorie ZFC.

1938.

Kurt Gödel demontre que l'hypothese du continue ne peut être refutée ds la theorie ZFC

1963:

Paul Cohen demontre qu'on ne peut pas prouver l'hypothese du Continuum ds la Theorie ZFC.

Elle est indecidable dans ZFC.

THEORIE DES GROUPES

”The introduction of the digit 0 or the group concept was general nonsense too, and mathematics was more or less stagnating for thousands of years because nobody was around to take such childish steps...”

Alexandre Grothendieck

Le Groupe Symetriqeie

Def X ENS $X \neq \emptyset$ son gpe symetrique

$$\mathfrak{S}_X = \mathrm{Bij}_{\mathrm{ENS}}(X,X) = \mathrm{Bij}(X)$$

$$= \{ f : X \xrightarrow{\sim} X \}$$

Structures supplementaire

$G_X \neq \emptyset$ $\quad$ $Id_X : X \longrightarrow X$

$$x \longrightarrow x$$

<u>Composition</u> : si $f, g \in Bij(X, X)$

$\Longrightarrow g \circ f \in Bij(X, X)$

<u>$\circ$ et associative</u> : $\forall f, g, h \in \mathfrak{S}_X$

$h \circ g \circ f \in \mathfrak{S}_X$

Neutralité de Id_X : $\forall f \in \mathfrak{S}_X$

$$Id_X \circ f = f = f \circ Id_X$$

- <u>Réciproque (Inversion)</u>

$\forall f \in \mathfrak{S}_X$ il existe $f^{-1} \in \mathrm{Bij}(X,X) = \mathfrak{S}_X$

tq $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X = f \circ f^{-1}$

Ces propriétés font de $\mathrm{Bij}(X,X) = \mathfrak{S}_X$

un groupe ("group")

DÉFINITION 2.1. *Un groupe* $(G, \star, e_G, \cdot^{-1})$ *est la donnee d'un quadruple forme de*

- *d'un ensemble* G *non-vide,*
- *d'une application (appelee loi de composition interne)*

$$\star : \begin{array}{ccc} G \times G & \mapsto & G \\ (g, g') & \mapsto & \star(g, g') =: g \star g' \end{array}$$

- *d'un element* $e_G \in G$ *(appele element neutre),*
- *d'une application (appele inversion)*

$$\bullet^{-1} : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

ayant les proprietes suivantes:

- *Associativite:* $\forall g, g', g'' \in G,\ (g \star g') \star g'' = g \star (g' \star g'')$ $= g * g' * g''$
- *Neutralite de* e_G*:* $\forall g \in G,\ g \star e_G = e_G \star g = g.$
- *Inversibilite:* $\forall g \in G,\ g^{-1} \star g = g \star g^{-1} = e_G.$

Exemples : $\mathfrak{S}_X \quad X \neq \emptyset$:

$$\left(\mathfrak{S}_X = \mathrm{Bij}(X,X), \circ, \mathrm{Id}_X, \bullet^{-1}\right)$$

forme un groupe (le gp symetrique)

$X = \{1,2,3\}$

$\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}}$ a 6 elts

$Id_{\{1,2,3\}} = 1 \to 1 \quad 2 \to 2 \quad 3 \to 3$

$(12) : \quad 1 \to 2 \quad 2 \to 1 \quad 3 \to 3$

$(23) : \quad 1 \to 1 \quad 2 \to 3 \quad 3 \to 2$

$(13) : \quad 1 \to 3 \quad 2 \to 2 \quad 3 \to 1$

$(123) : \quad 1 \to 2 \quad 2 \to 3 \quad 3 \to 1$

$(132) : \quad 1 \to 3 \quad 2 \to 1 \quad 3 \to 2$

$$(12)^{-1} = (12)$$

$$(123)^{-1} = (132)$$

$$(12)\circ(23): \quad 1 \to 2 \quad 2 \to 3 \quad 3 \to 1$$

$$= (123)$$

$(\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}, +, 0, n \to -n)$

$(\mathbb{N}, +, 0, n \to -n)$ pas un gpe : pas d'inversion

$(\mathbb{Q}, +, 0, n \to -n)$ gp

$(\mathbb{R}, +, 0, n \to -n)$ gp

$(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \times, 1, x \to \frac{1}{x})$ est un gpe

$(\mathbb{Z}-\{0\}, \times, 1, \cdot^{-1})$ pas un gpe

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$(\mathbb{Z}^\times = \{-1, +1\}, \times, 1, \cdot^{-1})$ est un gpe

Groupe trivial : $(\{e\}, \underset{\nearrow}{*}, e, \bullet^{-1} = \mathrm{Id}_{\{e\}})$

Astérisque

ou RHCP

$* : (e,e) \longrightarrow e$

Groupe trivial