Structure des Espaces Vectoriels

Applications linéaires et dimensions

Définition 7.6. *Soient V et W deux K-espaces vectoriels; un morphisme $\varphi : V \mapsto W$ de K-modules est appele une application K-lineaire.*

Proposition 7.4 (Critere d'application lineaire). *Une application entre espaces vectoriels $\varphi : V \mapsto W$ est lineaire ssi*

$$\forall \lambda \in K,\ v, v' \in V,\ \varphi(\lambda . v + v') = \lambda . \varphi(v) + \varphi(v').$$

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n)$$

PROPOSITION 8.1. *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire avec V de dimension finie. Soit $\mathscr{G} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_g\} \subset V$ une famille generatrice alors φ est completement determinee par l'ensemble de images des elements de $\mathscr{G}$:*

$$\varphi(\mathscr{G}) = \{\varphi(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_g)\} \subset W.$$

En particulier, $\varphi(\mathscr{G})$ est une famille generatrice de $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V)$ et on a

$$\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \leqslant \dim(V).$$

<u>Preuve</u> : Si G est generatrice de V

$\forall w \in \mathrm{Im}(\varphi) \quad w = \varphi(v) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_g e_g)$

$= \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_g \varphi(e_g)$

w est CL des $\varphi(G)$

Réciproquement $\varphi(\mathcal{G}) \subset \varphi(V)$

et $\quad \operatorname{Vect} \varphi(\mathcal{G}) \subset \varphi(V)$

$$\operatorname{Vect} \varphi(\mathcal{G}) = \varphi(V)$$

Comme $|\varphi(\mathcal{G})| \leq |\mathcal{G}|$

$$\dim \varphi(V) \leq |\mathcal{G}|$$

en particulier si $|G| = d_V$

$$\dim \varphi(V) \leq d_V.$$

Définition 8.1. *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire. Le rang de φ est la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$:*

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Proposition 8.2 (Inegalite du rang). *Soit V de dimension finie. On a*

$$\operatorname{rg}(\varphi) \leqslant \min(\dim V, \dim W).$$

$$\dim \varphi(V)$$

Preuve: on a vu $\operatorname{rg}(\varphi) \leq \dim V$

et $\operatorname{rg}(\varphi) = \dim \varphi(V) \leq \dim W$.

$\square$

Exercice 8.1. Soient V, W deux espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire. Montrer que

(1) Si φ est injective alors l'image par φ d'une famille libre est libre et
$$\dim(V) \leqslant \dim(W)$$
(2) Si φ est surjective alors l'image par φ d'une famille generatrice est generatrice et
$$\dim(V) \geqslant \dim(W).$$
(3) Si φ est bijective, l'image d'une base de V est une base de W et $\dim(V) = \dim(W)$.

Thm Noyau-Image

Théorème 8.1 (Noyau-Image). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire avec V de dimension finie. On a*

$$\dim V = \dim(\ker \varphi) + \dim(\underbrace{\operatorname{Im} \varphi}_{\operatorname{rg}(\varphi)}).$$

Preuve:

Soit $k = \dim \ker \varphi \quad k \leq d = \dim V$

$\{e_1, \dots, e_k\}$ = base de $\ker \varphi$

$r = \operatorname{rg}(\varphi) = \dim \varphi(V) \quad r \leq \dim V = d$

$\{f_1, \dots, f_r\}$ = base de $\varphi(V)$

$$f_i = \varphi(e_{k+i}) \qquad i=1 \dots r$$

On dispose de $k+r$ vecteurs de V

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+r}\} = B_\varphi = \text{base de } V$$

B_φ est libre : Supposons que

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_{k+r} e_{k+r} = 0_V$$

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) + \lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_{k+r}\varphi(e_{k+r})$$

$$= \overset{\|}{0_W} + \underbrace{\lambda_{k+1} f_1 + \cdots + \lambda_{k+r} f_r}_{\overset{\|}{0_W}}$$

$$= 0_W$$

Comme $\{f_1, \ldots, f_r\}$ est libre

$$\Longrightarrow \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_{r+k} = 0_K$$

On a $v = 0_V = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$

$\{e_1, \ldots, e_k\}$ est libre $\Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0_K$

B_φ est generatrice: $v \in V$

$$\varphi(v) \in \varphi(V)$$

$$\varphi(v) = \lambda_{r+1} f_1 + \dots + \lambda_{k+r} f_r$$

$\lambda_{k+i} \in K$ $\{f_1, \dots, f_r\}$ = base de $\varphi(V)$

$$\varphi(v) = \varphi(\underbrace{\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_{k+r} e_{k+r}}_{v'})$$

$$\varphi(v-v') = \varphi(v) - \varphi(v') = 0_W$$

$$v - v' \in \ker \varphi$$

$$v - v' = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$$

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + v'$$

$$= \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} \dots + \lambda_{k+r} e_{k+r}$$

B_φ est une base

$$|B_\varphi| = k + r = \dim V.$$

$\square$

Corollaire 8.1 (Critere de bijectivite). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre espaces de dimension finie. Si*

$$\dim(V) = \dim(W)$$

alors est conditions suivantes sont equivalentes

(1) *φ est injective.*
(2) *φ est surjective*
(3) *φ est bijective.*

<u>Preuve</u>: Si φ est injective $\dim \ker \varphi = 0$

$\Rightarrow \dim V = \dim W = \dim \varphi(V)$

$\varphi(V) \subset W$ et qu'ils ont m̂ dim

$\varphi(V) = W \rightsquigarrow \varphi$ est surjective.

....

$\square$

Exemple : formes linéaires

DÉFINITION 8.2. *Une forme lineaire sur V est une application lineaire de V a valeurs dans le corps K (vu comme K-ev sur lui-meme)*

$$\ell : V \mapsto K.$$

PROPOSITION 8.3. *Soit ℓ une forme lineaire. Si elle est non-nulle, i.e. $\ell \neq \underline{0}_K$, alors*

$$\mathrm{Im}(\ell) = K, \ \dim(\ker l) = \dim(V) - 1.$$

Preuve : Si $\ell \neq 0$ il existe $v \in V$ tq $\ell(v) = \lambda \neq 0_K$ donc $\ell(V) \subset K$ est un sev non-nul et comme $\dim_K(K) = 1$ $\ell(V) = K$.

$rg(\ell) = 1$ $\dim \ker(\ell) = \dim V - 1$

Rmq : $\ker(\ell)$ est un hyperplan vectoriel..

DÉFINITION 8.3. *Soit V de dimension finie. Un sous-espace vectoriel de dimension* $\dim V - 1$ *est appelle un hyperplan vectoriel.*

PROPOSITION 8.4. *Soit V de dimension finie et $H \subset V$ un hyperplan vectoriel. Il existe une forme lineaire ℓ_H telle que*

$$\ker \ell_H = H.$$

Preuve: Soit $\{e_1, \dots, e_{d-1}\}$ une base de H

on complete cette famille libre en une base

de V $\{e_1, \dots\dots, e_{d-1}, e_d\}$

et soit $e_d^* : v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \longrightarrow x_d \in K$

alors e_d^* est linéaire

$$e_d^*(\lambda v + v') = e_d^*((\lambda x_1 + x_1').e_1 + \dots + (\lambda x_d + x_d').e_d)$$
$$= \lambda x_d + x_d' = \lambda e_d^*(v) + e_d^*(v')$$

e_d^* = application d-ième coord ds la base $\{e_1, \dots, e_d\}$ est linéaire.

$$\ker e_d^* = \{v = x_1 e_1 + \dots + x_{d-1} e_{d-1} + 0.e_d\}$$
$$= H$$

$\square$

Exemple (formes coordonnées)

Soit V de $\dim V = d$

et $B = \{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de V

On definit

$$e_i^* : v = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d \in V \longrightarrow x_i \in K$$

Pour chaque $i = 1, \dots, d$ le e_i^* sont des formes linéaire non-nulle associées au elts de la base B

$\rightsquigarrow$ formes linéaires coordonnées / B

Structure des Espaces d'application linéaires

Rappel: V, W des K-EV

$\mathrm{Hom}_K(V,W)$ a une structure de K-ev (et même de K-algèbre si $W=V$)

φ, ψ linéaires : $\lambda\varphi+\psi : v \longrightarrow \lambda\varphi(v)+\psi(v)$

$\lambda \in K$

linéaire

THÉORÈME 8.2 (Dimension de l'espace des applications lineaires). *Si V et W sont de dimensions finies, alors $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ est de dimension finie*

$$\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim V. \dim W.$$

Preuve: Soit B une base de V

$B = \{e_1, \dots, e_d\}$ alors pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$

on sait que φ et determinee par

$\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)$

$$\begin{aligned} \mathrm{eval}_B : \quad \mathrm{Hom}_K(V,W) &\longrightarrow W^d \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)) \end{aligned}$$

eval_B est injective.

eval_B est surjective : soient $(w_1, \dots, w_d) \in W^d$

il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ tq

$\varphi(e_i) = w_i$. $\mathrm{Eval}_B(\varphi) = (w_1, \dots, w_d)$

on définit $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d)$

$$= x_1 \cdot w_1 + \dots + x_d w_d$$

On vérifie que φ est linéaire et $\varphi(e_i) = w_i$.

De plus Eval_B est linéaire

$$\mathrm{eval}_B(\lambda\varphi+\psi)=\big((\lambda\varphi+\psi)(e_1),\dots,(\lambda\varphi+\psi)(e_d)\big)$$

$$=\big(\lambda\varphi(e_1)+\psi(e_1),\dots,\lambda\varphi(e_d)+\psi(e_d)\big)$$

$$=\lambda\big(\varphi(e_i)\big)_{i\leq d}+\big(\psi(e_i)\big)_{i\leq d}$$

$$=\lambda\,\mathrm{eval}_B(\varphi)+\mathrm{eval}_B(\psi)$$

$$\mathrm{evol}_B : \mathrm{Hom}_K(V,W) \xrightarrow{\sim} W^d$$

$$\dim \mathrm{Hom}_K(V,W) \simeq W^d$$

$$\dim W^d = d.\dim W$$

$$W \simeq K^{d'} \quad d' = \dim W$$

$$W^d \simeq (K^{d'})^d = K^{d'} \times \cdots \times K^{d'} \quad d \text{ fois}$$

$$\simeq K^{d.d'}$$

$$\dim \mathrm{Hom}_K(V,W) = d.d'$$

<u>Exo</u>: Soient V, W des K-ev de dim d_V et d_W

alors $\dim V \times W = d_V + d_W$

DUALITY

SLIPKNOT TR1BUT3

Dualité

Définition 8.4. *Une application lineaire, $\ell : V \mapsto K$, de V vers le corps K est appelee "forme lineaire". On note l'espace des formes lineaires par*

$$V^* := \mathrm{Hom}_{K-ev}(V, K)$$

et on l'appelle le dual de V.

$\dim V^* = \dim V \cdot \dim K = \dim V$

en particulier $V \simeq V^*$

Si $B = \{e_1, \dots, e_d\}$ base de V

$e_i^* : V \to K$

$e_i^*(v) =$ i-eme coord de v ds la base B

$v = x_1 . e_1 + \dots + x_d e_d \quad e_i^*(v) = x_i$.

THÉORÈME 8.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de V, la famille*

$$\mathscr{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

est une base de V^*. On a

$$\forall i, j \leqslant d,\ \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i=j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}.$$

DÉFINITION 8.6. *La base*

$$\mathscr{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

s'appelle la base duale de la base $\mathscr{B}$.

Preuve: $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Comme $|\mathcal{B}^*| = d$ il suffit de mq $\mathcal{B}^*$ est libre ou generatrique.

B^* est libre :

Supposons $\ell = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_d e_d^* = 0_K$

$$0_K = \ell(e_1) = \lambda_1 e_1^*(e_1) + \lambda_2 e_2^*(e_1) + \dots + \lambda_d e_d^*(e_1)$$

$$= \lambda_1 \cdot 1 + 0 + \quad + 0$$

$$= \lambda_1$$

de m̂ $0_K = \ell(e_i) = \lambda_i \rightsquigarrow B^*$ est libre

$= \text{Base}$

COROLLAIRE 8.2. *Soit $\ell : V \mapsto K$ une forme lineaire. On a*

$$\ell = \sum_{i=1}^{d} \ell(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i^*.$$

Autrement dit, les coordonnees de ℓ dans la base $\mathscr{B}^*$ sont donnees par les $(\ell(\mathbf{e}_i))_{i \leqslant d}$ (ie. les valeurs de ℓ en chacun des $\mathbf{e}_i$, $i \leqslant d$).

Preuve: on sait que B^* est generatrice

$l \in V^*$ $\quad l = x_1 e_1^* + \cdots + x_d e_d^*$

$$l(e_1) = x_1 \cdot e_1^*(e_1) + x_2 \cdot e_2^*(e_1) + \cdots + x_d e_d^*(e_1)$$

$$l(e_1) = x_1 \qquad x_i = l(e_i)$$

$\square$

Isomorphisme explicite entre V et V^*

Pour mq $\dim \mathrm{Hom}_K(V,W) = d_V \cdot d_W$

on avait introduit : B = base de V

$$\mathrm{eval}_B : \mathrm{Hom}_K(V,K) \xrightarrow{\sim} K^{d_V} \qquad W = K$$

$$\ell \longmapsto (\ell(e_1), \dots, \ell(e_d))$$

$$V^* \xrightarrow[\mathrm{eval}_B]{} K^d \xrightarrow[CL_B]{} V$$

$$(x_1, \ldots x_d) \longmapsto v = x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d$$

l'application $CL_B \circ \mathrm{eval}_B : V^* \xrightarrow{\sim} V$

Rmq: Cet isomorphisme dépend du choix de la base B

<u>Bi-dualité</u> : $(V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$

on sait que $V^* \simeq V$ et que $V^{**} \simeq V^*$

et donc $V^{**} \simeq V$

Exercice : on peut donne un isomorphisme canonique entre V et V^{**}

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{eval}_\bullet} : \quad & V \longrightarrow (V^*)^* \\ & v \longrightarrow \mathrm{eval}_v : l \in V^* \longrightarrow l(v) \in K \end{aligned}$$

$\searrow$ est un isomorphisme.

- si on identifie V and V^{**} a l'aide de $\mathrm{eval}_\bullet$ alors la base B est identifie a la base $B^{**} = \{(e_i^*)^* \; i = 1, \dots, d\}$

Application linéaire duale

$$\varphi : V \longrightarrow W \qquad \ell' : W \longrightarrow K$$

alors $\ell' \circ \varphi : V \longrightarrow K$

la precomposition par φ défini une application

$$\varphi^* : \begin{array}{l} W^* \longrightarrow V^* \\ \ell' \longmapsto \ell' \circ \varphi \end{array}$$

φ^t l'application duale de φ

DÉFINITION 8.8. *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire. L'application duale φ^* de φ est l'application*

$$\varphi^* : W^* \mapsto V^*$$

qui associe a une forme lineaire $\ell' : w \in W \mapsto \ell'(w) \in K$, la forme lineaire sur V obtenue par pre-composition par φ:

$$\varphi^*(\ell') := \ell' \circ \varphi : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & K \\ v & \mapsto & \ell(\varphi(v)) \end{array}.$$

Exemple : $U \subset V$ $\quad i_U : u \in U \longrightarrow u \in V$

$\ell \in V^* \qquad i_U^*(\ell) = \ell \circ i_U$

$\ell_{/U} : u \in U \longrightarrow \ell(u)$. $\quad i_U^* =$ restriction au SEV U

PROPOSITION 8.6. *L'application duale*

$$\varphi^* : \ell' \in W^* \mapsto \ell \circ \varphi \in V^*$$

est lineaire:

$$\varphi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*).$$

Preuve: $\forall \lambda \in K$ et $\ell'\ \ell'' \in W^*$

$$\varphi^*(\lambda \ell' + \ell'') \overset{?}{=} \lambda \varphi^*(\ell') + \varphi^*(\ell'')$$

$$\varphi^*(\lambda \ell' + \ell'')(v) = (\lambda \ell' + \ell'')(\varphi(v))$$

$$= \lambda \ell'(\varphi(v)) + \ell''(\varphi(v))$$

$$= (\lambda \varphi^*(\ell') + \varphi^*(\ell''))(v)$$

Théorème 8.4. *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre deux espaces de dimensions finies.*

(1) *(Linearite) Montrer que l'application*

$$\bullet^* : \varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*,V^*)$$

qui a une application lineaire associe l'application lineaire duale est elle meme lineaire:

$$(\lambda\varphi + \varphi')^* = \lambda\varphi^* + \varphi'^*$$

En d'autres termes

$$\bullet^* \in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V,W),\mathrm{Hom}_K(W^*,V^*)).$$

(2) *(Anti-morphisme) Soit $\psi : W \mapsto Z$. Montrer que*

$$(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*.$$

$\psi\circ\varphi : V \to Z$

(3) *(Involutivite) Montrer que si le bi-dual V^{**} est identifie (canoniquement) a V via l'isomorphisme*

$$\mathrm{eval}_\bullet : v \in V \mapsto (\ell \mapsto \ell(v)) \in V^{**}$$

alors la duale de la duale qu'une application est l'application elle-meme:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

$$\bullet^* \circ \bullet^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}$$

Representation paramétrique /Cartésienne d'un SEV

Representation paramétrique : $W \subset V$

si $\mathcal{G}_W$ est génératrice de W

$$\mathcal{G}_W = \{e_1, \dots, e_g\} \subset W$$

$$W = \{w \in V \text{ tq } w = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_g \cdot e_g \quad x_1, \dots, x_g \in K\}$$

si $\mathcal{G}_W$ est libre ($\mathcal{G}_W$ = base de W)

la representation de chaque $w \in W$ est unique.

Proposition 8.7 (Representation cartesienne d'un SEV). *Soit $W \subset V$ un SEV (distinct de V). Il existe un entier $d' \geqslant 1$ et une famille de d' formes lineaires*

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_{d'}\} \subset V^*$$

telles que

$$W = \{w \in V \text{ tels que } \ell_1(w) = 0,\ \ell_2(w) = 0, \cdots, \ell_{d'}(w) = 0\}.$$

De maniere equivalente, $W = \ker \varphi_{\mathcal{L}}$ avec

$$\varphi_{\mathcal{L}} : w \in V \mapsto (\ell_1(w), \cdots, \ell_{d'}(w)) \in K^{d'}.$$

En fait on peut prendre $d' = d_V - d_W$ et la famille

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_{d_V - d_W}\} \subset V^*$$

forment une famille libre de V^* (ie. les ℓ_i, $i \leqslant d_V - d_W$ sont lineairement independantes).

<u>Preuve</u>: W admet une base $B_W = \{e_1, \dots, e_{d_W}\}$ on peut la completer en une base de V

$$B_V = \{e_1, \dots, e_{d_W}, e_{d_W+1}, \dots, e_{d_V}\}$$

$$B_V^* = \{e_1^*, \dots, e_{d_W}^*, e_{d_W+1}^*, \dots, e_{d_V}^*\}$$

$$W = \{w \in V \text{ tq } e_{d_W+1}^*(w) = \dots = e_{d_V}^*(w) = 0\}$$

$$d' = d_V - d_W.$$

<u>Rmq</u> : la representation n'est pas unique

si $W = \{ w \in V \ \ l_1(w) = \dots = l_{d'}(w) = 0_K \}$

alors $d' \geq d_V - d_W$.

On peut le deduire du Thm Noyau-Image