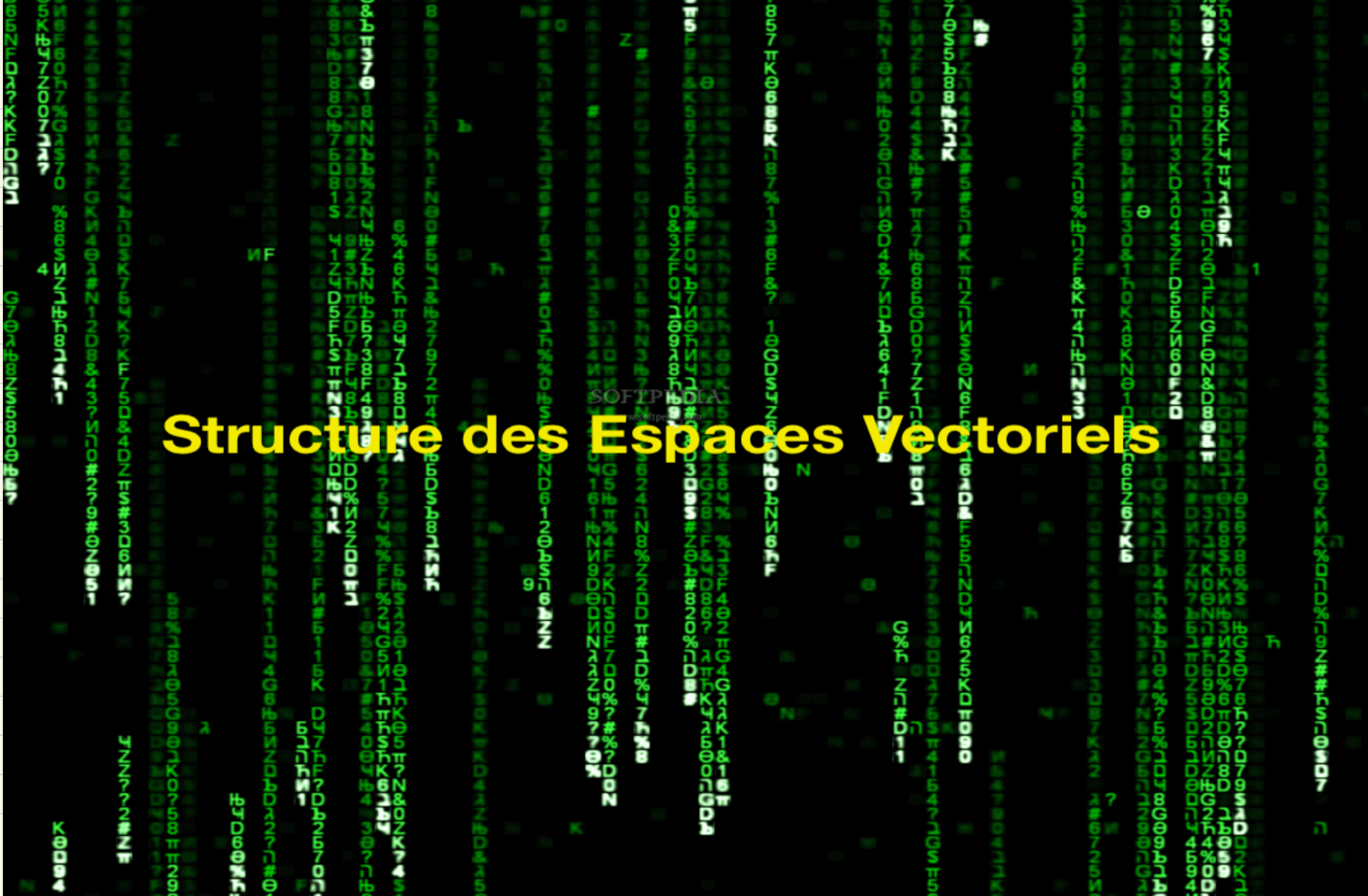
Structure des Espaces Vectoriels



"An attempt at visualizing the Fourth Dimension:
Take a point, stretch it into a line,
curl it into a circle, twist it into a sphere,
and punch through the sphere."

Définition 7.7. *Soit V un K-e.v. Un sous-ensemble $\mathscr{G} \subset V$ est une famille generatrice si*

$$\operatorname{Vect}(\mathscr{G}) = \langle \mathscr{G} \rangle_K = V,$$

ie. tout element $v \in V$ peut s'ecrire sous la forme d'une combinaison lineaire (finie) a coefficients dans K d'elements de $\mathscr{G}$: pour tout $v \in V$ il existe $n \geqslant 1$, $x_1, \cdots, x_n \in K$, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \in \mathscr{G}$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i. \tag{7.4.1}$$

Si V admet une famille generatrice finie, on dit que V est un K-module ou un K-ev de type fini.

Définition 7.8. *Soit V un K-ev de type fini. Si V est non-nul, sa dimension est le cardinal minimum d'une famille generatrice finie de V:*

$$\dim(V) := \min_{\mathscr{G} \text{ generatrice}} |\mathscr{G}|.$$

Par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul $\{0_V\}$ est

$$\dim(\{0_V\}) = 0$$

(on peut prendre la famille vide comme famille generatrice).

On dira egalement "K-ev de dimension finie" a la place de " K-ev de type fini".

Un espace vectoriel qui n'est pas de type fini est dit de "dimension infinie".

Théorème 7.2. *Tout K-espace vectoriel de dimension finie $d = \dim V$ est isomorphe (comme K-ev) a l'espace vectoriel K^d (avec la convention que $\{0_K\} = K^0$). En d'autres termes V est isomorphe au K-module libre de rang $d = \dim(V)$, K^d.*

$$K^d = \{ v = (x_1, \ldots, x_d) \quad x_i \in K \}$$

Définition. *Soit V un K-e.v. Un sous-ensemble fini*

$$\mathscr{G} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset V$$

est une famille generatrice (du K-ev V) ssi les conditions equivalentes suivantes sont satisfaites:

(1) *On a*

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = V.$$

(2) *pour tous $v \in V$, il existe $x_1, \cdots, x_d \in K$ tels que*

$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d.$$

(3) *L'application lineaire*

$$CL_{\mathscr{G}} : \begin{array}{ccc} K^d & \mapsto & V \\ (x_1, \cdots, x_d) & \mapsto & x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d \end{array}$$

est surjective.

Si V admet une famille generatrice finie ou dit que V est un K-ev de type fini ou est de dimension finie. On a alors

$$\dim_K V \leqslant d.$$

Théorème. *Soit $\mathscr{G} \subset V$ une famille generatrice de V de cardinal $d = \dim V$ alors l'application $CL_{\mathscr{G}}$ est injective et defini donc un isomorphisme*

$$CL_{\mathscr{G}} : K^d \simeq V.$$

Corollaire 7.1 (Critere dimensionel d'isomorphisme). *Soient V, W des K-ev de dimensions finie d_V et d_W alors V et W sont isomorphes ssi ils ont meme dimension:*

$$V \simeq W \iff d_V = d_W.$$

les classes d'isom de K-EV de dim fini sont indexees par $\mathbb{N}$.

Famille Libre

$$\mathcal{F} = \{e_1, \dots, e_f\}$$

$$CL_{\mathcal{F}} : K^f \longrightarrow V$$

$$(x_1, \dots, x_f) \longrightarrow v = x_1 e_1 + \dots + x_f e_f$$

<u>Rappel:</u> $\mathcal{F}$ est generatrice ssi $CL_{\mathcal{F}}$ est surjective

Si $CL_{\mathcal{F}}$ est injective
$\mathcal{F}$ est une famille libre

DÉFINITION 7.11. *Un sous-ensemble fini* $\mathscr{F} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_f\} \subset V$ *d'un espace vectoriel est une famille libre de* V *si et seulement si l'une des trois conditions equivalentes suivantes est satisfaite:*

(1) *L'application lineaire*

$$CL_{\mathscr{F}} : \begin{array}{ccc} K^f & \mapsto & V \\ (x_1, \cdots, x_f) & \mapsto & x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_f.\mathbf{e}_f \end{array}$$

est injective.

(2) *Pour tous* $x_1, \cdots, x_f, \ x'_1, \cdots, x'_f \in K$

$$x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_f.\mathbf{e}_f = x'_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x'_f.\mathbf{e}_f \Longrightarrow x_1 - x'_1 = \cdots = x_f - x'_f = 0_K.$$

(3) *Pour tous* $x_1, \cdots, x_f \in K$

$$x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_f.\mathbf{e}_f = 0_V \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_f = 0_K.$$

Une famille $\mathscr{F}$ *qui n'est pas libre est dit liee.*
On dit egalement que

- *les vecteurs d'une famille libre sont lineairement independents;*
- *les vecteurs d'une famille liee sont lineairement dependents;*

Exemples $v \in V - \{0\}$

$\{v\}$ est libre

Supposons que $x_1 . v = 0_V$ si $x_1 \neq 0_K$

x_1 est inversible et $x_1^{-1} . x_1 . v = 0_V$

$$\underset{v}{\parallel} \quad = 0_V$$

Base Canonique

$$K^d = \{(x_1, \dots, x_d) \quad x_i \in K\}$$

K^d est engendré par $B^0 = \{e_1^0, \dots, e_d^0\}$

$$e_i^0 = (0_K, \dots, 1_K, \quad 0_K)$$

i-ème position

$$v = (x_1, \dots, x_d) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_d \cdot e_d$$

B° est libre et egalement generatrice

$$|B_d^\circ| = d = \dim(K^d)$$

$$CL_{B^\circ} = Id_{K^d}$$

$$\{(1,1,0)\ (0,1,1)\ (1,0,1)\} \subset K^3$$

si $\mathrm{Car}(K) \neq 2 \Rightarrow$ libre

on suppose que

$$x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,0,1)=(0,0,0)$$

On v mq $x=y=z=0$ (si $\mathrm{Car}\, K \neq 2$)

$$(x+y,\ x+z,\ y+z) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \rightsquigarrow x=y=z=0$$

$\mathrm{Car}(K)=2$ la famille et liée

$$(1_K,1,0)+(0,1,1_K)+(1,0,1_K) = (2_K,2_K,2_K) = (0_K,0_K,0_K)$$

Proposition 7.9. *Soit V un K-ev de dimension d et $\mathscr{G} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une famille generatrice de cardinal d alors $\mathscr{G}$ est libre.*

$CL_{\mathcal{G}}$ est injective $\rightsquigarrow$ $\mathcal{G}$ est libre.

PROPOSITION 7.10. *Une famille a l elements $\mathscr{F} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_l\} \subset V$ est liee ssi il existe $i \in \{1, \cdots, l\}$ tel que $\mathbf{e}_i$ peut s'exprimer comme combinaison lineaire des autres elements de $\mathscr{F}$:*

$$\exists i \leqslant l,\ \mathbf{e}_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F} - \{\mathbf{e}_i\}) = \mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_j,\ j \neq i\}).$$

On a alors

$$W = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{F} - \{\mathbf{e}_i\}).$$

<u>Preuve</u> Si $\mathscr{F}$ et lie il existe

$$(x_1, \ldots, x_l) \neq (0, \ldots, 0) \text{ tq}$$

$$x_1 e_1 + \cdots + x_l e_l = 0_V$$

supposons que $x_1 \neq 0_K$

alors

$$x_1 e_1 = -x_2 e_2 + \dots + -x_\ell e_\ell$$

$x_1 \neq 0$ $\quad x_1^{-1} \cdot x_1 \cdot e_1 = (-x_1^{-1} x_2) e_2 + \dots + (-x_1^{-1} x_\ell) \cdot e_\ell$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ e_1 \end{array} = (-x_1^{-1} x_2) e_2 + \dots + (-x_1^{-1} x_\ell) \cdot e_\ell$$

e_1 est CL de $\{e_2, \dots, e_\ell\}$

Reciproquement si e_1 est CL de $\{e_2, \dots, e_\ell\}$

$$e_1 = y_2 e_2 + \dots + y_\ell e_\ell$$

$$0_V = -e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_\ell e_\ell$$

et on a un CL non triviale qui donne 0_V

$$(-1, y_2, \dots, y_\ell) \neq (0, \quad , 0)$$

$\square$

Théorème 7.3 (Majoration du cardinal d'une famille libre). *Soit V un espace vectoriel non-nul de dimension d et $\mathscr{F} = \{v_1, \cdots, v_f\} \subset V$ une famille finie et libre; alors $f \leqslant d$.*

Preuve: Recurrence sur $d = \dim V$.

Si $d_V = 1$ alors $V = K.e$ $e \in V - \{0_V\}$

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_f\}$ une famille libre de f vecteurs. On v mq $f \leq 1$

pour $i = 1, \dots, g$

$v_i = x_i . e$ avec $x_i \in K$ $x_i \neq 0$

si $x_i = 0 \Rightarrow v_i = 0_V$ on aurait un famille liée :

$$0_V = 0.v_1 + \dots + 1.v_i + \dots + 0.v_g$$

$$\Rightarrow v_2 = x_2 . e = x_2 . x_1^{-1} . x_1 . v_1$$

$$v_2 = \lambda_2 . v_1 \Longrightarrow \lambda_2 v_1 + (-1) v_2 = 0_V \quad \square$$

On a démontré le thm si $\dim V = 1$

Soit V de dim d. On suppose qu'on a démontré le thm pour tout EV de dim $\leq d-1$

et on veut le faire pour V. (

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_g\} \subset V$ une famille libre on veut mq $g \leq d$.

Comme $\dim V = d$ soit $\{e_1, \ldots, e_d\}$ une famille génératrice de V

$\forall i = 1, \ldots, f$ il existe $(x_{i,j})_{j \leq d}$ tq

$$v_i = x_{i,1} \cdot e_1 + \cdots + x_{i,d} \cdot e_d$$

Comme $\mathcal{F}$ est libre tous les v_i sont $\neq 0_V$

il existe pour tout i un j_i tq $x_{i,j_i} \neq 0_K$

On prend $i = f$ et soit $j_0 \in \{1, \dots, d\}$ tq

$$x_{f, j_0} \neq 0_K$$

Quitte à permuter les e_j on suppose que

$$j_0 = d \qquad x_{f,d} \neq 0$$

On pose $\displaystyle v_i' = v_i - \frac{x_{i,d}}{x_{f,d}} \cdot v_f \quad i = 1, \dots, f$

Rmq : $v'_f = v_f - \frac{x_{f,d}}{x_{f,d}} \cdot v_f = 0_V$

$$v'_i = x'_{i,1} \cdot e_1 + \ldots\ldots + x'_{i,d-1} \cdot e_{d-1} + x'_{i,d} \cdot e_d$$

avec

$$x'_{i,j} = x_{i,j} - \frac{x_{i,d}}{x_{f,d}} \cdot x_{f,j} \in K$$

$j = d \qquad x'_{i,d} = x_{i,j} - \frac{x_{i,d}}{x_{f,d}} \cdot x_{f,d} = 0_K$

pour $i \in \{1, \dots, f-1\}$

$$v'_i = x'_{i,1} e_1 + \dots + x'_{i,d-1} \cdot e_{d-1}$$

$$\in \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_{d-1}\}) = V'$$

On a alors que $\dim V' \leq d-1$

Pour faire la recurrence on va mq

$\mathcal{F}' = \{v'_1, \dots, v'_{f-1}\}$ est libre.

Si on mq $\mathcal{F}'$ est libre alors

$\mathcal{F}' \subset V'$ est une famille libre ds un

K-EV de dim $\leq d-1$

$$\Rightarrow |\mathcal{F}'| = f-1 \leq d-1 \Rightarrow f \leq d. \qquad \square$$

Mq $\mathcal{F}'$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1} \in K$ tq

$$\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} v'_{\ell-1} = 0_V$$

on ~~W~~ mq $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\ell-1} = 0$

On $v'_i = v_i - \dfrac{x_{i,d}}{x_{\ell,d}} \cdot v_\ell \implies$

$$\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} v'_{\ell-1} = 0_V = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} v_{\ell-1} + \lambda_\ell \cdot v_\ell$$

pour un certain $\lambda_p \in K$

comme $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre $\Rightarrow$

$$\lambda_1 = \dots\dots = \lambda_{p-1} = \lambda_p = 0_K$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}'$ est bien libre.

Rmq: Cette stratégie utilise le processus d'élimination de Gauß pour voir que $v_j' = 0_V$ et surtout que $\{v_1', \ldots, v_{j-1}'\} \in \mathrm{Vect}(\{e_1, \ldots, e_{d-1}\})$

Bases

DÉFINITION 7.10. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Une famille $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ est une base de V si l'une des conditions equivalentes suivantes est verifiee:*

(1) *$\mathscr{B}$ est generatrice et libre,*
(2) *L'application combinaison lineaire de $\mathscr{B}$,*
$$CL_{\mathscr{B}} : K^d \mapsto V$$
est un isomorphisme,
(3) *Pour tout $v \in V$ il existe un unique uplet $(x_1, \cdots, x_d) \in K^d$ tel que v s'ecrit sous la forme*
$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d.$$

Ex: la base canonique

$B^0 = \{e_1^0, \dots, e_d^0\} \subset K^d$ est une base.

THÉORÈME 7.4. *Soit V un K-ev de dimension d alors V possede une base et toute base $\mathscr{B}$ de V verifie*

$$|\mathscr{B}| = \dim(V). \tag{7.4.3}$$

$\dim K^d = d.$

Preuve :

On a vu que une famille generatrice de cardinal $\dim V$ et libre (et donc une base)

- Si B est une base $\Rightarrow$ B generatrice
  $|B| \geq \dim V$

et comme B est libre

$$|B| \leq \dim V.$$

$$|B| = \dim V$$

•

Théorème 7.5 (Extraction et Completion). *Soit V un K-ev non nul de dimension d. On a*

1. *(1) Une famille generatrice $\mathscr{G}$ de cardinal d est une base.*
2. *(2) Une famille libre $\mathscr{L}$ de cardinal d est une base.*
3. *(3) (Extraction) Soit $\mathscr{G} \subset V$ une famille generatrice alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V contenue dans $\mathscr{G}$.*
4. *(4) (Completion) Soit $\mathscr{L} \subset V$ une famille libre alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V contenant $\mathscr{L}$.*

<u>Preuve</u> : (Extraction) Soit G une famille generatrice (pas forcement fini) $\Rightarrow |G| \geq \dim V = d$

G contient au moin un vecteur $\neq 0_V$ (sinon $V = \{0\}$)

et $e \in G$ $e \neq 0$ on a vu

$\{e\}$ forme une famille libre

G contient des familles libres et elle sont toute de cardinal $\leq d$.

Soit $B \subset G$ une famille libre de cardinal maximal $|B| \leq d$

On v mq B est generatrice.

$$B = \{e_1, \dots, e_b\} \qquad b = |B| \leq d$$

- si $b = d$ alors B est generatrice
- si $b < d \Rightarrow B$ n'est pas generatrique

$$\mathrm{Vect}(B) \subsetneq V$$

il existe $e \in G$ $e \notin Vect(B)$

on va mq $B \cup \{e\}$ est libre (contradiction)

supposons que $x_1.e_1 + \dots + x_p.e_p + x.e = 0_V$

- $x = 0_K \Rightarrow x_1.e_1 + \dots + x_p e_p = 0_V$

$\Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$

si $x \neq 0_K$

$$e = -\frac{x_1}{x}.e_1 + \dots + -\frac{x_b}{x}.e_b \in \mathrm{Vect}(B)$$

(contraction)

$B \cup \{e\}$ est libre : contradiction avec le fait que B est libre de taille maximal.

(Completion) Soit $\alpha \subset V$ une famille libre ($|\alpha| \leq d$)

$l = |\alpha|$ $\alpha = \{e_1, \dots, e_l\}$ on veut mq

α est incluse dans une base

Il existe une famille generatrice finie contenant α : si B' = un base de

de V alors $\mathcal{L} \cup B'$ est generatrice
et contient $\mathcal{L}$.

Soit $B \supset \mathcal{L}$ generatrice et de
taille minimale. Mq B est libre

$B = \{e_1, \dots, e_l, \dots, e_b\}$ $b = |B| \geq l$

Supposons que B n'est pas libre

il existe $x_1, \dots, x_\ell, \dots x_b \in K$ non tous nulls tels que

$$x_1 \cdot e_1 + \dots + x_b \cdot e_b = 0_V$$

- si $b > \ell$ et $x_{\ell+1} = \dots = x_b = 0$

$$\Longrightarrow x_1 \cdot e_1 + \dots + x_\ell \cdot e_\ell = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_\ell = 0$$

(α est libre)

- sinon il existe $i > l$ tq $x_i \neq 0$

supposons que $i = b > l$ $x_b \neq 0$

$$e_b = -\frac{x_1}{x_b} \cdot e_1 + \dots + -\frac{x_l}{x_b} \cdot e_l + \dots + -\frac{x_{b-1}}{x_b} \cdot e_{b-1}$$

$$e_b \in \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_{b-1}\})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_b\})}_{= V} = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_{b-1}\})$$

Contredit la minimalité de $|B|$ comme famille génératrice contenant α.

$\Rightarrow B$ est libre $\quad B = \text{base}$.

$\square$

Théorème 7.6 (de la base incomplete). *Etant donne* $\mathscr{L}$ *une famille libre de* V *et* $\mathscr{B} \subset V$ *une base, on peut extraire de* $\mathscr{B}$ *une sous-famille* $\mathscr{L}' \subset \mathscr{B}$ *de sorte que* $\mathscr{L} \sqcup \mathscr{L}'$ *forme une base de* V*.*

Dimension et Sev

THÉORÈME 7.7 (Bases et SEV). *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel alors W est de dimension finie et*

(1) on a $\dim(W) \leqslant \dim(V)$.
(2) Si $\dim(W) = \dim(V)$ *alors* $W = V$.
(3) Si $\mathscr{B}_W$ *est une base de* W *alors il existe une base* $\mathscr{B}_V$ *de* V *contenant* $\mathscr{B}_W$.

Preuve: Soit $\alpha \subset W$ une famille libre alors $\alpha \subset V$ est encore libre.
et donc $|\alpha| \leqslant \dim V$

Prenons $B \subset W$ libre et tq $b = |B|$ est max

Mq B est generatrice de W:

si $\exists\, e \in W$ tq $e \notin Vect(B)$

$B = \{e_1, \dots, e_b\}$ alors par la preuve du thm de completion si $e \notin Vect(B)$

$\Rightarrow \{e_1, \dots, e_b, e\}$ est libre $\Rightarrow$ contredit la maximalite de B.

$\Rightarrow$ B est generatrice $\Rightarrow$ B = base de W

$$|B| = \dim W \leq \dim V.$$

$\square$

<u>Terminologie</u> : un SEV $W \subset V$ de dimension

- $\dim W = 1$ $\quad$ W = droite vectorielle
- $\dim W = 2$ $\quad$ W = plan vectoriel
- $\dim W = \dim V - 1$ $\quad$ W = hyperplan vectoriel

Dimensión Infinita

Définition 7.14. *Soit V un K-e.v. Un sous-ensemble $\mathscr{G} \subset V$ est une famille generatrice si*

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = V,$$

ie. tout element $v \in V$ peut s'ecrire sous la forme d'une combinaison lineaire (finie) d'elements de $\mathscr{G}$: il existe $d \geqslant 1$, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d \in \mathscr{G}$, $x_1, \cdots, x_d \in K$,, tels que

$$v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d. \tag{7.5.1}$$

Définition 7.15. *Soit V un K-e.v., un sous-ensemble $\mathscr{L} \subset V$ est une famille libre si tout sous-ensemble fini $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$ est libre: si $\mathscr{L}' = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ (les elements tous distincts), on a*

$$x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_d = 0_K. \tag{7.5.2}$$

Définition 7.16. *Une base algebrique $\mathscr{B} \subset V$ est une famille libre et generatrice.*

Proposition 7.11. *Soit $\mathscr{B} \subset V$ une base algebrique. Alors tout element v de V est representable comme combinaison lineaire finie d'elements de $\mathscr{B}$ et une telle representation est unique.*

__Exemple__ $\mathcal{F}_f(\mathbb{N};\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ supp} f \text{ est fini} \}$

On défini $\text{Supp}(f) = \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } f(n) \neq 0 \}$

On mq $\mathcal{F}_f(\mathbb{N};\mathbb{R})$ est un SEV de $\mathcal{F}(\mathbb{N};\mathbb{R})$

et un base de $\mathcal{F}_f(\mathbb{N};\mathbb{R})$ est donné par

$$\{\delta_m \quad m \in \mathbb{N}\} = \text{base de } \mathcal{F}_f(\mathbb{N};\mathbb{R})$$

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \qquad \mathrm{Supp}(\delta_m) = \{m\}$$

- $\mathcal{F}(\mathbb{N};\mathbb{R})$: il est difficile d'imaginer une base....

Enfait on a besoin de

Théorème 7.8 (Existence de bases sous l'axiome du choix). *Dans une theorie des ensembles contenant l'axiome du choix, tout espace vectoriel sur un corps K possede une base et toutes les bases de V ont meme cardinal: pour toutes bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ il existe une bijection*

$$\mathscr{B} \simeq \mathscr{B}'.$$

La dimension de V est de cardinal d'une base:

$$\dim(V) = |\mathscr{B}|.$$

Rmq: on montre que l'axiome du choix est equivalent a l'existence d'une base algebrique pour tout K-EV et pour tout corps K.