
FREE YOUR MIND.
THE MATRIX

- *M: Do you know what I'm talking about ?*
- *N: The Matrix ?*
- *M: Do you want to know what IT is ?*

  The Matrix is everywhere. It is all around us.

  Even now, in this very room.

$$\begin{array}{ccc} V & W & \mathrm{Hom}(V,W) \\ \cup & \cup & \cup \\ \mathcal{B} & \mathcal{B}' & \mathcal{B}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \end{array}$$

$$CL_{\mathcal{B}} : K^d \xrightarrow{\sim} V$$

$$CL_{\mathcal{B}'} : K^{d'} \simeq W$$

$$CL_{\mathcal{B}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}} : (K^{d'})^d = \underbrace{K^{d'} \times \cdots \times K^{d'}}_{d \text{ fois}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,W)$$

DÉFINITION 9.2. *Soient $\mathscr{B} \subset V$, $\mathscr{B}' \subset W$ des bases comme ci-dessous et $\mathcal{B}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \subset \mathrm{Hom}(V,W)$ la base de $\mathrm{Hom}(V,W)$ associee. L'application reciproque $CL^{-1}_{\mathcal{B}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$ sera egalement notee*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} : \mathrm{Hom}(V,W) \mapsto M_{d'\times d}(K).$$

Explicitement, si on la la decomposition $\varphi = \sum\sum_{i\leqslant d', j\leqslant d} m_{ij}(\varphi)\mathcal{E}_{ij}$ alors on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij}(\varphi))_{i\leqslant d', j\leqslant d} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & m_{ij} & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} & i \end{array}$$

La matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi)$ est appellee matrice associee a φ dans les bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$. Rappelons que pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$, $(m_{i,j}(\varphi))_{i\leqslant d'}$ est l'ensemble des coordonnees de l'image $\varphi(\mathbf{e}_j)$ de $\mathbf{e}_j \in \mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$: ie.

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant d'} m_{ij}(\varphi)\mathbf{f}_i.$$

Addition et $\times$ par des Scalaires

$$M = (m_{ij}) \quad N = (n_{ij}) \quad \lambda \in K$$

$$M_{d' \times d}(K)$$

$$\lambda M + N = (\lambda m_{ij} + n_{ij})_{ij} \in M_{d' \times d}(K)$$

$M_{d' \times d}(K)$ est un K-ev de dim $d' \times d$.

Multiplication de Matrices

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\Psi} W$$

$B=\{e_1,\dots,e_d\}$ $\quad B'=\{f_1,\dots,f_{d'}\}$ $\quad B''=\{g_1,\dots,g_{d''}\}$

$\varphi : U \to V$ $\qquad \Psi : V \to W$

$N = mat_{B'B}(\varphi)$ $\qquad M = mat_{B''B'}(\Psi)$

$N = (n_{ij})$ $\qquad M = (m_{jk})$

$$L = \mathrm{mat}_{B''B}(\psi \circ \varphi) = (l_{ik})_{\substack{i \leq d'' \\ k \leq d}}$$

DÉFINITION 9.5. *Soient* $d, d', d'' \geqslant 1$ *et* $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$, *on defini le produit des matrices* M *et* N *comme etant la matrice*

$$L := M.N \in M_{d'' \times d}(K)$$

avec

$$L = (l_{ik})_{i \leqslant d'', k \leqslant d} \in M_{d'' \times d}(K) \text{ et } l_{ik} := \sum_{j=1}^{d'} m_{ij}.n_{jk}.$$

Soient $d, d', d'' \geqslant 1$, on a donc defini une application "produit de matrices"

$$\bullet.\bullet : \begin{array}{ccc} M_{d'' \times d'}(K) \times M_{d' \times d}(K) & \mapsto & M_{d'' \times d}(K) \\ (M, N) & \mapsto & L = M.N \end{array}. \tag{9.2.1}$$

$$m_{i1} \cdot m_{1k} + m_{i2} \cdot n_{2k} + m_{ij} \cdot n_{jk} + \dots$$

N : d' lignes d colonnes

$$\begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1k} & \cdots & n_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{j1} & \cdots & n_{jk} & \cdots & n_{jd} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{d'1} & \cdots & n_{d'k} & \cdots & n_{d'd} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1d'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{id'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{d''1} & \cdots & m_{d''j} & \cdots & m_{d''d'} \end{pmatrix}$$

M : d'' lignes d' colonnes

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1k} & \cdots & l_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{i1} & \cdots & l_{ik} & \cdots & l_{id} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{d''1} & \cdots & l_{d''k} & \cdots & l_{d''d} \end{pmatrix}$$

L = M × N : d'' lignes d colonnes

Théorème 9.2. *Soit U, V, W des espaces vectoriels de dimensions d, d', d'' et $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ des bases. Soient des applications lineaires*

$$\varphi : U \mapsto V,\ \psi : V \mapsto W.$$

On note les coefficients des matrices de φ, ψ et $\psi \circ \varphi$ dans les bases adequates par

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (n_{jk})_{jk}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi) = (m_{ij})_{ij}$$
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = (l_{ik})_{ik}$$

alors on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) \tag{9.2.2}$$

Autrement dit on a

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1d} \\ l_{21} & \cdots & l_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{d''1} & \cdots & l_{d''d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d'} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d''1} & m_{d''2} & \cdots & m_{d''d'} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1d} \\ n_{21} & \cdots & n_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ n_{d'1} & \cdots & n_{d'd} \end{pmatrix}$$

Théorème 9.1 (Proprietes fonctionelles du produit de matrices). *Soient* $d, d', d'' \geqslant 1$ *et* $M_{d''\times d'}(K)$, $M_{d'\times d}(K)$, $M_{d''\times d}(K)$ *les espaces de matrices correspondants.*

L'application "produit de matrices"

$$\begin{array}{ccc} M_{d''\times d'}(K) \times M_{d'\times d}(K) & \mapsto & M_{d''\times d}(K) \\ (M, N) & \mapsto & M.N \end{array}$$

a les proprietes suivantes

(1) *Distributive a gauche: pour* $\lambda \in K$, $M, M' \in M_{d''\times d'}(K)$, $N \in M_{d'\times d}(K)$,

$$(\lambda.M + M').N = \lambda.M.N + M'.N.$$

(2) *Distributive a droite: pour* $\lambda \in K$, $M \in M_{d''\times d'}(K)$, $N, N' \in M_{d'\times d}(K)$,

$$M.(\lambda.N + N') = \lambda.M.N + M.N'.$$

(3) *Neutralite de l'identite: pour* $M \in M_{d''\times d'}(K)$,

$$\mathrm{Id}_{d''}.M = M,\ \ M.\mathrm{Id}_{d'} = M$$

(4) *La matrice nulle est absorbante: pour* $M \in M_{d''\times d'}(K)$,

$$\underline{0}_{d'''d''}.M = \underline{0}_{d'''d'},\ \ M.\underline{0}_{d'd} = \underline{0}_{d''d}.$$

(5) *Associativite: Soit* $d''' \geqslant 1$ *et* $L \in M_{d'''\times d''}(K)$, $M \in M_{d''\times d'}(K)$, $N \in M_{d'\times d}(K)$ *alors*

$$(L.M).N = L.(M.N) \in M_{d'''\times d}(K)$$

Images de Vecteurs

Proposition 9.1. *Soit $\mathscr{B} \subset V$, $\mathscr{B}' \subset W$ des bases, $v \in V$ un vecteur de coordonnees $(x_j)_{j \leqslant d}$ dans la base $\mathscr{B}$ (ie. $v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d$) et $(y_i)_{i \leqslant d'}$ les coordonnees de $\varphi(v)$ dans la base $\mathscr{B}'$ (ie. $\varphi(v) = y_1.\mathbf{f}_1 + \cdots + y_{d'}.\mathbf{f}_{d'}$). On associe a v et $\varphi(v)$ leurs matrices colonnes (de hauteurs d et d' =*

$$\mathrm{Col}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Col}_{\mathscr{B}'}(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix}$$

alors on a la relation

$$\mathrm{Col}_{\mathscr{B}'}(\varphi(v)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{Col}_{\mathscr{B}}(v).$$

Autrement dit si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d}$, *on a*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

<u>Exemple</u>: $\varphi(x,y,z) = (2x+4y,\ y+3z)$

$v = (1,1,1)$ $\quad \varphi(1,1,1) = (6,4)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

__Exemple__ : $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2} = W$

$$\varphi : P(X) \in V \longrightarrow X.P''(X) - P(X)$$

$$\varphi(X^2 + X + 2) = X.2 - X^2 - X - 2$$
$$= -X^2 + X - 2$$

$B = \{1, X, X^2\}$ $\varphi(1) = -1$ $\varphi(X) = -X$

$$\varphi(X^2) = 2X - X^2$$

$$\operatorname{mat}_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = X^2 + X + 2 = 2.1 + 1.X + 1.X^2 \rightsquigarrow (2,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi(P)$$

$$= -2 + X - X^2$$

Produit de Matrices Elementaires

Proposition 9.2. *Soit $E_{ij} \in M_{d'' \times d'}$ et $E_{j'k} \in M_{d' \times d}$ alors*

$$E_{ij}.E_{j'k} = \delta_{j=j'} E_{ik}.$$

Preuve $\mathcal{E}_{ij} \circ \mathcal{E}_{j'k} = ?$

$$\mathcal{E}_{ij}(\mathcal{E}_{j'k}(e_{k'})) = \mathcal{E}_{ij}(\delta_{k=k'} \cdot f_{j'})$$

$$= \delta_{k=k'} \mathcal{E}_{ij}(f_{j'}) = \delta_{k=k'} \delta_{j=j'} g_i$$

$$\longrightarrow \quad \varepsilon_{ij} \circ \varepsilon_{j'k} = \delta_{j=j'} \cdot \varepsilon_{ik}$$

$\square$

Cas des Isomorphismes : $d = d'$

$$\varphi : \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cup}{V}} \xrightarrow{\sim} \underset{\mathcal{B}'}{\underset{\cup}{W}} \qquad \varphi^{-1} : \underset{\mathcal{B}'}{\underset{\cup}{W}} \xrightarrow{\sim} \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cup}{V}}$$

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_W \qquad \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\varphi^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_W)$$

$$M = mat_{B',B}(\varphi) \qquad M' = mat_{BB'}(\varphi^{-1})$$

$$M . M' = Id_d$$

De m̂

$$mat_{BB'}(\varphi^{-1}) \times mat_{B'B}(\varphi) = mat_{BB}(Id_V)$$

$$M' \times M = Id_d$$

la matrice M' est l'inverse de M

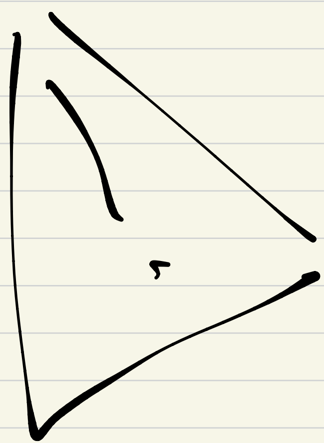
Proposition 9.3. *soit $\varphi : V \simeq W$ un isomorphisme lineaire et $\varphi^{-1} : W \mapsto V$ la reciproque. On a les relations*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi^{-1}).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_d,$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_W) = \mathrm{Id}_d.$$

En particulier si $V = W$ et $\varphi = \mathrm{Id}_V$ est l'identite on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_V).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_d. \tag{9.2.3}$$



il faut prendre B et B'

et B' et B

Rang d'une matrice : $\varphi : V \to W$

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

$$\operatorname{rg} \varphi = \dim(\operatorname{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)))$$

$M = \operatorname{mat}_{B'B}(\varphi)$ $\varphi(e_j)$ se lit ds la i-ème colonne de M

DÉFINITION 9.6. *Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$, le rang d'une matrice M est la dimension de l'espace engendre par les d colonnes de M dans $\mathrm{Col}_{d'}(K)$:*

$$\mathrm{rg}(M) := \dim \mathrm{Vect}(\{\mathrm{Col}_j(M),\ j \leqslant d\}).$$

Autrement dit $\mathrm{rg}(M)$ est la taille maximale d'une sous-famille libre de la famille $\{\mathrm{Col}_j(M),\ j \leqslant d\}$ des colonnes de M.

si $M = \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi)$

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\varphi)$$

Inegalite du Rang:

$$\mathrm{rg}(\varphi) \leq \min(d, d')$$

$$\Longrightarrow M \in \mathrm{Mat}_{d' \times d}(K) \quad \mathrm{rg}(M) \leq \min(d, d')$$

Example: $\varphi(x,y,z) = (2x+4y,\ y+3z)$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Car $K = 2$ $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad rg(M) = 1$

- Car $K \neq 2$ $\quad rg(M) = 2$

Matrices de Rang donné

$\varphi : V \to W \qquad rg(\varphi) = r \leq \min(d, d')$

soit $f_1, \dots, f_r$ = base de $\mathrm{Im}\varphi \subset V$

$f_i = \varphi(e_i) \quad i = 1, \dots, r$

$\{e_{r+1}, \dots, e_d\}$ base de $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset V$

$B = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d\}$ = base de V

Soit B' base de W

$\varphi(e_i) = f_i$ si $i \leq r$ | $B' = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_d\}$

$\varphi(e_{i+r}) = 0_W$ si $i \geq 1$

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = \begin{array}{c} n \\ \begin{array}{r} r\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & 0 & \\ & & & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{r} \quad \uparrow \\ \varphi(e_r) = f_r \end{array}$$

$$I_{d'\times d}(r) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & \end{array} \\ r & \left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right) \end{array}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \mathrm{Id}_r & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} =: I_{d'\times d}(r)$$

Transposé

Définition 9.7. *La transposition est l'application des matrices $d' \times d$ vers les matrice $d \times d'$ definie par*

$$
{}^t\bullet : \begin{array}{ccc} M_{d'\times d}(K) & \mapsto & M_{d\times d'}(K) \\ M = (m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d} & \mapsto & {}^tM = (m^*_{ji})_{j\leqslant d, i\leqslant d'} \end{array},
$$

avec

$$
m^*_{ji} = m_{ij}, \ j \leqslant d, i \leqslant d'.
$$

Autrement dit si

$$
M = (m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d}, \ {}^tM = (m^*_{ji})_{j\leqslant d, i\leqslant d'} = (m_{ij})_{j\leqslant d, i\leqslant d'}
$$

$$
M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}, \ {}^tM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots & \cdots & m_{d'1} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & \cdots & m_{d'2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1d} & m_{2d} & \cdots & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}
$$

Matrices et Dualité

$$\varphi : \underset{B}{\underset{\cup}{V}} \longrightarrow \underset{B'}{\underset{\cup}{W}} \qquad \varphi^* : \underset{B'^*}{\underset{\cup}{W^*}} \longrightarrow \underset{B^*}{\underset{\cup}{V^*}}$$

$$\operatorname{mat}_{B^*B'^*}(\varphi^*) = {}^t\operatorname{mat}_{B'B}(\varphi)$$

Théorème (Matrice de l'application duale). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire et $\varphi^* : W^* \to V^*$ sa duale; $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de V et V' et*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i\leqslant d',j\leqslant d}$$

la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et soit

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}^*,\mathscr{B}'^*}(\varphi^*) = (m^*_{ji})_{j\leqslant d,i\leqslant d'}$$

la matrice de φ^* dans les bases duales $\mathscr{B}'^* \subset W^*$ et $\mathscr{B}^* \subset V^*$ alors on a

$$m^*_{ji} = m_{ij},\ i \leqslant d',\ j \leqslant d$$

En d'autres termes

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}^*,\mathscr{B}'^*}(\varphi^*) = {}^t\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).$$

THÉORÈME 9.3. *(Proprietes fonctionelles de la transposition) La transposition a les proprietes suivantes:*

(1) *Linearite:* ${}^t(\lambda.M + M') = \lambda {}^tM + {}^tM'$.
(2) *Involutivite:* ${}^t({}^tM) = M$.
(3) *Anti-multiplicativite: pour* $M \in M_{d'',d'}(K)$, $N \in M_{d',d}(K)$, $M.N \in M_{d'',d}(K)$ *et*

$$ {}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM. $$

Rang et Transposition

$$M = \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) \qquad {}^tM = \mathrm{mat}_{B^*B'^*}(\varphi^*)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{rg}(\varphi) & = & \mathrm{rg}(\varphi^*) \\ \shortparallel & & \\ \mathrm{rg}(M) & = & \mathrm{rg}({}^tM) \end{array}$$

Théorème 9.4 (Invariance du rang par transposition). *Soit* $M \in M_{d' \times d}(K)$ *on a*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM).$$

Corollaire 9.1. *La rang d'une matrice est egal*

- *soit a la dimension du sous-espace de* $K^{d'}$ *engendre par les vecteurs colonnes de* M*,*

$$\mathrm{rg}(M) = \dim_K \mathrm{Vect}(\mathrm{Col}_i(M),\ i = 1, \cdots, d).$$

- *soit a la dimension du sous-espace de* K^d *engendre par les vecteurs lignes de* M*,*

$$\mathrm{rg}(M) = \dim_K \mathrm{Vect}(\mathrm{Lig}_j(M),\ j = 1, \cdots, d').$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(M)$ en fct de $\mathrm{Car}(K)$

Algèbre des matrices Carrées

$d' = d \quad Mat_{d\times d}(K) =: Mat_d(K)$

la multiplication de 2 matrices carrees de taille d donne un matrice □ de taille d

$$\times : \begin{array}{ccc} M_d(K)\times M_d(K) & \longrightarrow & M_d(K) \\ (M,N) & \longrightarrow & M.N \end{array}$$

THÉORÈME 9.6. *L'espace $M_d(K)$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication est un anneau (non-commutatif en general) dont l'element neutre est la matrice carree nulle $\underline{0}_d = \underline{0}_{d\times d}$ et dont l'unite est la matrice identite Id_d. De plus la structure de K-EV de $M_d(K)$ fait de l'anneau $(M_d(K), +, .)$ une K-algebre (de dimension d^2).*

On l'appelle l'algebre des matrices carres de dimension d (ou de rang d) sur le corps K (ou a coefficient dans K).

Preuve: le fait la mult est une loi interne + prop fct$^{\circ}$ de la mult des matrices

Lien avec l'algèbre des Endomorphismes

$W = V \quad Hom_K(V,W) = End_K(V)$

$(End_K(V), +, \circ, 0_V, Id_V)$ forme une K-algèbre

$\varphi \in End_K(V) \longrightarrow \underset{B,B}{mat}(\varphi) \in M_d(K)$

$= mat_B(\varphi)$

Théorème 9.7. *Soit V de dimension finie d et $\mathscr{B}$ une base de V, l'application*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} : \mathrm{End}(V) \mapsto M_d(K)$$

est un isomorphisme de K-algebres pour les lois d'addition et de multiplication decrites precedemment.

⚠ il faut bien prendre

$$B' = B$$

$$\varphi : \underset{B}{V} \longrightarrow \underset{B' = B}{V}$$

Groupe Lineaire

DÉFINITION 9.8. *Soit V un K-EV de dimension finie. Le groupe lineaire de V est le groupe (pour la composition dans* $\mathrm{End}(V)$*) des elements inversibles de l'algebre* $\mathrm{End}_K(V)$*; son element neutre est l'identite* Id_V *et on note ce groupe*

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{End}_K(V)^\times = \{\varphi : V \mapsto V,\ \varphi \textit{ est bijectif}\}.$$

Soit $d \geqslant 1$. Le groupe lineaire de rang d sur K est le groupe des matrices carrees inversibles dans l'algebre $M_d(K)$ pour la multiplication des matrices; son element neutre est la matrice identite Id_d *et on note ce groupe*

$$\mathrm{GL}_d(K) = M_d(K)^\times = \{M \in M_d(K),\ \exists M' \in M_d(K),\ M.M' = M'.M = \mathrm{Id}_d\}.$$

Critère d'Inversibilité

THÉORÈME 9.7 (Critere d'inversibilite des endomorphismes). *Soit $\varphi : V \mapsto V$ alors les conditions suivantes son equivalentes:*

(1) *φ est inversible (ie. bijective),*
(2) *φ est injective,*
(3) *φ est surjective,*
(4) $\mathrm{rg}(\varphi) = d$,
(5) *φ transforme une base de V en une famille libre,*
(6) *φ transforme une base de V en une famille generatrice*

(1) → (2) evident

(2) → (3) thm Noyau-Image $\underbrace{\dim \ker \varphi}_{=0} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}\, \varphi}_{=d} = d$

(4) ⇔ (3) definition du rang

(4) → (6) def (6) → (5) gen + taille d ⇒ libre

(5) → (1) inj ⇒ bijective

Théorème 9.8 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les colonnes)). *Soit une matrice carree $M = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} \in M_d(K)$, les conditions suivantes sont equivalentes*

(1) M *est inversible, ie.* $M \in \mathrm{GL}_d(V)$,
(2) $\mathrm{rg}(M) = d$,
(3) $\{\mathrm{Col}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille libre de* $\mathrm{Col}_d(K)$,
(4) $\{\mathrm{Col}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille generatrice de* $\mathrm{Col}_d(K)$.

THÉORÈME 9.9 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les lignes)). *Soit une matrice carree $M = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} \in M_d(K)$, les conditions suivantes sont equivalentes*

(1) *M est inversible, ie. $M \in \mathrm{GL}_d(V)$,*
(2) *${}^tM$ est inversible, ie. ${}^tM \in \mathrm{GL}_d(V)$,*
(3) *$\mathrm{rg}({}^tM) = d$,*
(4) *$\{\mathrm{Lig}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ forme une famille libre de $\mathrm{Lig}_d(K)$,*
(5) *$\{\mathrm{Lig}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ forme une famille generatrice de $\mathrm{Lig}_d(K)$.*

<u>Preuve</u> : M inversible ssi $\mathrm{rg}(M) = d$

mais $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$

donc $\mathrm{rg}(M) = d \Longleftrightarrow \mathrm{rg}({}^tM) = d$

M inversible ssi ${}^tM$ inversible

Pour (4) (5) provient des Critères (3) et (4) pour les colonnes appliques à ${}^tM$ en utilisant que ${}^t\bullet$ transforme les colonnes en des ligne et vise versa.

$\square$

Changement de Base

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

$$B, B_n \qquad\qquad B', B'_n$$

liens entre

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) \text{ et } \mathrm{mat}_{B'_n B_n}(\varphi)$$

$B = \{e_1, \dots, e_d\}$ $\quad B_n = \{e_{1,n}, \dots, e_{d,n}\}$

$B' = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$ $\quad B'_n = \{f_{1,n}, \dots, f_{d',n}\}$

THÉORÈME 9.10 (Formule de changement de base). *Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}_n \subset V$ et $\mathscr{B}', \mathscr{B}'_n \subset W$ des bases de V et W. On a la relation*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}_n}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_W).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n}(\mathrm{Id}_V).$$

Preuve : On a

$$\varphi = \mathrm{Id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_V$$

$$\mathrm{mat}_{B'_n B_n} \varphi = \mathrm{mat}_{B'_n B'} \mathrm{Id}_W \times \mathrm{mat}_{B' B} \varphi \times \mathrm{mat}_{B B_n} \mathrm{Id}_V$$

$\square$

Définition 9.9. *La matrice carree de taille $d = \dim V$,*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n} := \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n}(\mathrm{Id}_V)$$

est appelle matrice de changement de base, de la base $\mathscr{B}$ a la base $\mathscr{B}_n$ ou encore la matrice de passage de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}_n$.

Sa j-ieme colonne est formee par les coordonnees du j-ieme vecteur $\mathbf{e}_{nj}$ exprime comme combinaison lineaire dans la base $\mathscr{B}$.

La formule de changement de base se reecrit alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}_n}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}'}.\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n}.$$

Rmq: les matrices mat_{B,B_n} et $\mathrm{mat}_{B'_n,B'}$ sont inversibles et on peut calculer leurs inverses

PROPOSITION 9.7. *Soit trois bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subset V$ on a*

(1) *Formule d'inversion:*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}.\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}} = \mathrm{Id}_d.$$

En particulier une matrice de passage est inversible (dans $M_d(K)$) et son inverse est la matrice de passage de la base initiale a la nouvelle base:

$$\mathrm{mat}^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}.$$

(2) *Formule de transitivite:*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}.\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}.$$

Preuve : $\mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_V$

$$\mathrm{mat}_{B B_1}(\mathrm{Id}) \times \mathrm{mat}_{B_1 B_2}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{mat}_{B B_2}(\mathrm{Id}_V)$$

et prendre $B_2 = B$ $\quad \mathrm{mat}_{BB}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_d$

Equivalencias de Matrices

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

$$\mathcal{B} \qquad \mathcal{B}'$$

$$\mathcal{B}_n \qquad \mathcal{B}'_n$$

sì $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi)$ $\quad N = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_n,\mathcal{B}_n}(\varphi)$

$N = AMB \qquad A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_n \mathcal{B}'} \quad B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}_n}$

DÉFINITION 9.10. *Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont dites equivalentes si il existe des matrices inversibles $A \in \mathrm{GL}_{d'}(K)$, $B \in \mathrm{GL}_d(K)$ telles que*

$$N = A.M.B.$$

PROPOSITION 9.8. *Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont equivalentes ssi il existe V de dimension d et W de dimension d', des bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}_n \subset V$ et $\mathscr{B}', \mathscr{B}'_n \subset W$ et une application lineaire $\varphi : V \mapsto W$ telle que*

$$M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\varphi), \;\; N = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n\mathscr{B}_n}(\varphi)$$

<u>Preuve</u> : une direction de la preuve a été donnée : $\Leftarrow$

$\Longrightarrow$ trouver V, W et des Bases B B_n
B' B_n
qui conviennent

V = Espace de matrices colonnes de hauteur d

W = ——————————————— de hauteur d'

B, B' les bases canoniques

φ : l'application $Col_d(K) \to Col_{d'}(K)$

j-ieme vecteur de la base can $\to$ la j-ieme colonne de M dans la BC

$N = \mathrm{mat}_{B'_n B_n}(\varphi)$ ces base sont obtenues a partir de A et B.

a trouver...

$\square$

PROPOSITION. *La relation "etre equivalente" est une relation d'equivalence (reflexive, symetrique, transitive) sur* $M_{d' \times d}(K)$.

Preuve:

$M = Id_{d'} \times M \times Id_d$ (reflex)

Symetique $N = AMB \Rightarrow M = A^{-1} N B^{-1}$

transitive $N = AMB \quad O = A'NB'$

alors $O = \underbrace{(A'A)}_{\in GL_{d'}(K)} M \underbrace{(BB')}_{\in GL_d(K)}$

$\square$

THÉORÈME 9.12. *Soient $M, N \in M_{d' \times d}(K)$. Les conditions suivantes sont equivalentes*

(1) *M et N sont equivalentes,*
(2) $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$,
(3) *M et N sont equivalentes a $I_{d' \times d}(r)$.*

<u>Preuve</u> si $M \sim N$ alors M et N representent la même application lineaire φ ⟶

(1)⟹(2) $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(N)$

(2)⟹(3) On a vu que si $\mathrm{rg}(\varphi) = r$ il existe des base $B \subset V$ $B' \subset W$ tq $\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = I_{d' \times d}(r)$

si $rg(M) = rg(N) = r$

alors M et N representent une applicat lineaire de rg $rg(\varphi) = r$ dont la matrice ds une base convenable est $I_{d' \times d}(r)$

$\rightsquigarrow M \sim I_{d' \times d}(r) \sim N$

$\rightsquigarrow M \sim N$

$\square$

Cor : le nb de classes d'equivalences de matrices equivalentes de taille $d' \times d$ vaut $\min(d,d')+1$ car les rangs possible sont $0, 1, \dots, \min(d,d')$

$\square$

<u>Matrices Semblables</u>

$$\varphi : \underset{B,\,B_n}{V} \longrightarrow \underset{B,\,B_n}{V}$$

$$M = mat_B(\varphi) \qquad N = mat_{B_n}(\varphi)$$

$$N = mat_{B_n B} \times M \times mat_{B B_n} \qquad \left(\begin{array}{l} D = C^{-1} \\ mat_{B B_n} = mat_{B_n B}^{-1} \end{array} \right)$$

$$N = C \times M \times D = C \times M \times C^{-1}$$

DÉFINITION 9.11. *On dit que deux matrices M, N sont semblables ou conjuguees si il existe $C \in GL_d(K)$ tel que*

$$N = C.M.C^{-1}.$$

La relation "etre semblables" ou "etre conjuguees" est une relation d'equivalence.

Une classe d'equivalence pour cette relation, l'ensemble des matrices de la forme

$$M^\natural := \mathrm{Ad}(\mathrm{GL}_d(K))(M) = \{C.M.C^{-1},\ C \in \mathrm{GL}_d(K)\}$$

est appellee classe de conjugaison (de M) et on note

$$M_d(K)^\natural = \{M^\natural\} = M_d(K)/\sim$$

l'ensemble des classes de conjugaison.

<u>Rmq</u> : Si M et N sont semblable alors M et N sont equivalentes ($A = C$ et $B = C^{-1}$)

PROPOSITION 9.9. *Deux matrices* $M, N \in \overset{M}{\cancel{GL}}_d(K)$ *sont semblables ssi* M *et* N *sont les matrices d'un meme endomorphisme dans des bases convenables: il existe un espace vectoriel de dimension* d, V, *deux bases* $\mathscr{B}, \mathscr{B}_n \subset V$ *et une application lineaire* $\varphi : V \mapsto V$ *telle que*

$$M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi), \ \ N = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n}(\varphi).$$

Rmq: la relation de similitude $\Longrightarrow$ relation d'equivalence de matrices

si M et N sont similaire $\Longrightarrow$ $rg(M) = rg(N)$ mais la reciproque est <u>loin</u> d'etre vraie.

__Exemple:__ Soit $M = Id_d$

les matrices semblable a M sont de la forme

$$\underset{\substack{\| \\ Id_d}}{C\, Id_d\, C^{-1}} \quad C \in GL_d(\mathbb{K})$$

Id_d est seule dans sa classe de similitude et aucune matrice de rang d (aucune matrice inversible) n'est semblable à Id_d

bien qu'elle soit equivalente (m̂ rg)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \not\sim_{\text{simi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exo:</u> mq $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ne sont pas similaires.

Supposer le contraire prendre φ qui les represente et calculer

$$\dim \ker(\varphi - \mathrm{Id}).$$

Action par Conjugaison

Définition 9.12. *Soit $C \in GL_d(K)$ une matrice inversible. Note note $\mathrm{Ad}(C)$ l'application dite de conjugaison par C:*

$$\mathrm{Ad}(C) : \begin{array}{ccc} M_d(K) & \mapsto & M_d(K) \\ M & \mapsto & C.M.C^{-1}. \end{array}$$

Proposition 9.10. *La conjugaison $\mathrm{Ad}(C)$ est un automorphisme de l'algebre $M_d(K)$:*

(1) *Linearite: On a $\mathrm{Ad}(C)(\lambda.M + N) = \lambda \mathrm{Ad}(C)(M) + \mathrm{Ad}(C)(N)$.*
(2) *Multiplicativite: $\mathrm{Ad}(C)(M.N) = \mathrm{Ad}(C)(M).\mathrm{Ad}(C)(N)$.*
(3) *Inversibilite: $\mathrm{Ad}(C)$ est bijective et $\mathrm{Ad}(C)^{-1} = \mathrm{Ad}(C^{-1})$.*

<u>Preuve</u> : $\mathrm{Ad}(C)(\lambda M+N) = C(\lambda M+N)C^{-1}$

$= (\lambda CM+CN).C^{-1} = \lambda CMC^{-1}+CNC^{-1}.$

$- C.M.N.C^{-1} = CMC^{-1}.CNC^{-1}$ $\quad Id_d = C^{-1}.C$

$$\mathrm{Ad}(C)\circ\mathrm{Ad}(C^{-1})M = C(C^{-1}MC)C^{-1}$$
$$= CC^{-1}MCC^{-1}$$
$$= \mathrm{Id}_d\, M\, \mathrm{Id}_d = M$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ad}(C)\circ\mathrm{Ad}(C^{-1}) = \mathrm{Id}_{M_d(K)}$$

$\square$

$$C \in GL_d(K) \longmapsto Ad(C) \in Aut(M_d(K))$$

$$\shortparallel$$

Groupe $GL(M_d(K))$

Groupe linéaire de K-ev $M_d(K)$

Proposition 9.11. *On dispose donc d'une application*

$$\mathrm{Ad}(\bullet) : C \in \mathrm{GL}_d(K) \mapsto \mathrm{Ad}(C) \in \mathrm{Aut}(M_d(K)) \simeq \mathrm{GL}_{d^2}(K)$$

appellee application adjointe.

L'application adjointe $\mathrm{Ad}(\bullet)$ *est un morphisme de groupes et definit donc une action a gauche* $\mathrm{GL}_d(K) \curvearrowright M_d(K)$*. Son noyau est forme par les matrices scalaires:*

$$\ker \mathrm{Ad} = K^\times \mathrm{Id}.$$

<u>Preuve</u> : $\mathrm{Ad}(C \times C') : M \to (C \times C').M(C \times C')^{-1}$

$$\parallel$$

$$CC'MC'^{-1}.C^{-1}$$

$$= \mathrm{Ad}(C)(\mathrm{Ad}(C')(M))$$

$$\mathrm{Ad}(C)\circ \mathrm{Ad}(C') = \mathrm{Ad}(CC')$$

et $\mathrm{Ad}(C)^{-1} = \mathrm{Ad}(C^{-1})$

$\mathrm{Ad}(\bullet)$ est un morphisme de Gpes défini une action $GL_d(K) \curvearrowright M_d(K)$

$\ker Ad(\cdot) = \{ C \in Gl_d(K) \text{ tq } Ad(C) = Id_{M_d(K)} \}$

$C \in \ker Ad(\cdot)$ ssi $\forall M \; CMC^{-1} = M$

$\iff \forall M \; CM = MC$

$\ker(Ad)$ et l'ensemble des inversibles qui commutent avec toutes les matrices. on veut que ce sont les matrice $K^{\times} . Id_d$

ie les matrices de forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in K^\times.$$

On utilise le fait que $\{E_{ij} \; i,j \leq d\}$ forment une base de $M_d(K)$

si C commute avec toute M

$\rightsquigarrow$ C commute avec toutes les E_{ij}

on veut mq si $\varphi \in GL(V)$ tq $\forall i,j$

$$\varphi \circ \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij} \circ \varphi \text{ avec } \varphi = \lambda \cdot Id_V$$

Rappele: $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ base de V

$$\forall\, v \in V \quad \mathcal{E}_{ij}(v) = e_j^*(v)\, e_i$$

$$\forall\, i,j \qquad \varphi \circ \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij} \circ \varphi$$

$$\Longrightarrow \varphi(\mathcal{E}_{ij}(e_j)) = \mathcal{E}_{ij}(\varphi(e_j))$$

$$\mathcal{E}_{ij}(e_j) = e_i$$

$$\varphi(e_i) = \mathcal{E}_{ij}(\varphi(e_j)) = e_j^*(\varphi(e_j)).e_i$$

on a $\varphi(e_i) = \lambda_j e_i$ avec $\lambda_j = e_j^*(\varphi(e_j))$

si on prend $j = i$

$$\varphi(e_i) = \lambda_i e_i = \lambda_j e_i$$

$\forall i,j \quad \lambda_i = \lambda_j \rightsquigarrow$ tous les λ_j sont egaux

au un m̂ λ.

$\forall i \quad \varphi(e_i) = \lambda e_i$

$\rightsquigarrow \varphi = \lambda \, Id_V \quad (\lambda \neq 0_K$ car φ est inversible$)$

$\square$

DÉFINITION 9.13. *L' image* $\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}_d(K)) \subset \mathrm{Aut}(M_d(K))$ *est appellee groupe des automorphismes interieurs de* $M_d(K)$ *et est notee*

$$\mathrm{Int}(M_d(K)) \subset \mathrm{Aut}_K(M_d(K)).$$

Operations Elementaires

sur une matrice

The first matrix I designed was quite naturally perfect.

It was a work of art. Flawless. Sublime.

A triumph only equaled by its monumental failure.

I. Les Lignes

Définition 10.1. *Les operations elementaires sur les lignes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d'\times d}(K)$ vers $M_{d'\times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \cdots, d'\}$ et $\lambda \in K^{\times}$ et $\mu \in K$*

(I) *Transposition: Echanger deux lignes $i \neq j \leqslant d'$ de M:*

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

(II) *Dilatation: Multiplier la i-eme ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$:*

$$L_i \to \lambda . L_i .$$

(III) *Combinaison Lineaire: Additionner a la ligne i un multiple scalaire de la la j-ieme ligne pour $i \neq j$: $\mu \in K$*

$$L_i \to L_i + \mu L_j$$

Ces transformations sont appellees transformations elementaires.

On les note respectivement T_{ij}, $D_{i,\lambda}$ et $Cl_{ij,\mu}$

Rmq: On pose $T_{ii} = Id$

$Cl_{ii,\mu} = L_i \to L_i + \mu L_i$ si $1+\mu \neq 0$

$\parallel$

$D_{i,1+\mu}$

Exemple : Car $K \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 10.1. *Ces trois types d'operations*

$$T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} : M_{d'\times d}(K) \mapsto M_{d'\times d}(K).$$

sont des applications lineaires bijectives sur $M_{d'\times d}(K)$

$$T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} \in \mathrm{GL}(M_{d'\times d}(K)).$$

<u>Preuve</u> $T_{ij} : L_i \longleftrightarrow L_j$

$$L_i(\lambda M + N) = \lambda L_i(M) + L_i(N)$$

$$\longleftrightarrow L_j(\lambda M + N) = \lambda L_j(M) + L_j(N)$$

Pareil pour les autres transformations

Inversibles $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$

$$D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,1/\lambda}^{-1}$$

$$Cl_{ij,\mu}^{-1} = CL_{ij,-\mu}$$

$\sqcap$

Proposition 10.2. *Les trois operations elementaires sont obtenues par multiplication a gauche de M par des matrices convenables: pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant d'$*

(I) $T_{ij}.\bullet : M \mapsto T_{ij}.M$
(II) $D_{i,\lambda}.\bullet : M \mapsto D_{i,\lambda}.M$
(III) $Cl_{ij,\mu}.\bullet : M \mapsto Cl_{ij,\mu}.M$.

ou les matrices carrees $T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} \in M_{d'}(K)$ sont definies par:

$$T_{ij} = \mathrm{Id}_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

$$D_{i,\lambda} = \mathrm{Id}_{d'} + (\lambda - 1).E_{ii},\ \ \lambda \neq 0$$

$$Cl_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_{d'} + \mu.E_{ij},\ \ i \neq j \text{ ou } \mu \neq -1 \text{ si } i = j.$$

Définition 10.2. *Les matrices*

$$T_{ij},\ \ D_{i,\lambda},\ \ \lambda \neq 0,\ \ Cl_{ij,\mu}$$

pour $i, j \leqslant d'$, $\lambda \neq 0$, et si $i = j$, $\mu \neq -1$ sont appellees matrices de transformations elementaires.