

## Partie I : Croissance, décroissance, monotonie

### Exercice 1.

Soient les fonctions  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Déterminer la monotonie de leur composée  $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si

- a)  $f$  et  $g$  sont croissantes,
- b)  $f$  et  $g$  sont décroissantes,
- c)  $f$  est croissante et  $g$  est décroissante,
- d)  $f$  est décroissante et  $g$  croissante.

**Exercice 2.** a) Si  $f: X \rightarrow Y$  est croissante et bijective, alors  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  est

- décroissante
- croissante
- ni croissante ni décroissante
- bornée

b) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction impaire et bijective, alors  $f^{-1}$  est

- impaire
- paire
- ni paire ni impaire
- périodique

### Exercice 3.

Soient  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

Vrai ou faux ?

- a) Si  $f$  est strictement monotone, alors  $f$  est injective.
- b) Si  $f$  est injective, alors  $f$  est monotone.
- c) Si  $f$  est bijective et croissante, alors sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est décroissante.
- d) Si  $f \circ g$  est décroissante, alors  $f$  et  $g$  sont décroissantes.

## Partie II : Parité et périodicité.

### Exercice 4.

Soient  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $p_1, p_2: D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions paires,  $q_1, q_2: D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions impaires et  $f: p_1(D) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Montrer les propositions suivantes.

- a)  $p_1 + p_2$  est paire.
- b)  $p_1 p_2$  est paire.
- c)  $q_1 + q_2$  est impaire.
- d)  $q_1 q_2$  est paire.
- e)  $p_1 q_1$  est impaire.
- f) si  $q_2(D) \subset D$ ,  $q_1 \circ q_2$  est impaire.
- g) si  $q_1(D) \subset D$ ,  $p_1 \circ q_1$  est paire.
- h)  $f \circ p_1$  est paire.

### Exercice 5 (Fonctions hyperboliques).

Nous définissons les **fonctions hyperboliques**  $\sinh, \cosh, \tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Elles sont respectivement appelées *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique*, *tangente hyperbolique*.

- a) Déterminer la parité de ces fonctions.

Montrer les égalités suivantes.

- b)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- c)  $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$
- d)  $(\cosh(x) + \sinh(x))^k = \cosh(kx) + \sinh(kx)$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 6.**

Vrai ou faux ?

- Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique. La plus petite période de  $f$  est toujours définie, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit  $T > 0$  tel que  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .
- Si  $f$  est périodique, alors  $|f|$  est aussi périodique.
- Si  $|f|$  est périodique, alors  $f$  est aussi périodique.
- Si  $f$  et  $|f|$  ont une plus petite période, celles-ci sont égales.
- Si  $f$  est  $T$ -périodique et  $\alpha > 0$ , alors la fonction  $x \rightarrow f(\alpha \cdot x)$  est  $\alpha \cdot T$ -périodique.

**Exercice 7.**

Etudier la parité et la périodicité des fonctions  $f$  suivantes, en donnant la plus petite période si possible :

- $f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin^2(x)}$
- $f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
- $f(x) = \tan(3x) + \cos(\pi x)$
- $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2$ .

**Partie III : Limites ponctuelles****Exercice 8.**

Montrer à l'aide de la définition de la limite que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 8) = 10.$$

**Exercice 9.**

Pour quels valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & x > 1 \\ 3, & x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 10.**

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et soit la fonction  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 1}{x + 1}, & x > 3 \\ \alpha, & x = 3 \\ \beta x - 4, & x < 3 \end{cases}$$

Pour quels valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  la fonction  $f$  est-elle continue en  $x_0 = 3$ .

