

- d) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- e) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
- f) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
- g) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 5.

A l'aide des critères de convergence, déterminer si la série donnée converge ou diverge :

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+7}-n)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

Indication : Pour la série (f), utiliser l'égalité : $1 - \cos(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

Étudier la convergence des séries suivantes en fonction de la valeur du paramètre $c \in \mathbb{R}$.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n$, (avec $c \neq 1$) c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$

Quelles sont les valeurs des séries (a) et (c) lorsqu'elles convergent ?

Exercices challenges.

Exercice 7.

- a) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle bornée et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente vers $L > 0$. Démontrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Rappels :

- La limite d'un produit de deux suites convergentes est le produit des limites.
- Si une suite converge, alors toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.

- b) En déduire $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ pour

$$x_n = \left(\frac{2n^2-2}{n^2+n}\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Exercice 8.

Le but de cet exercice est de montrer que la série harmonique diverge, c-à-d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

On propose de procéder de la façon suivante. Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Considérer la sous suite $(S_{n_j})_{j \geq 1} \subset (S_n)$ donnée par $n_j = 2^j$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $j \geq 1$,

$$S_{n_j} = 1 + \sum_{m=1}^j \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k}$$

(Pour mieux visualiser, commencez par écrire S_{n_1} , S_{n_2} et S_{n_3} .)

b) En utilisant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m-1} + 1 \leq k \leq 2^m$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^m}$, montrer que

$$S_{n_j} \geq 1 + \frac{j}{2}.$$

c) En déduire que $\lim_{j \rightarrow \infty} S_{n_j} = +\infty$ et donc (S_n) diverge.

Solutions.

- | | | | | |
|----|----------------------|----------------------|----------------------------------|--------------|
| 1. | a) $-1, 1$ | b) $-2, \frac{2}{3}$ | c) $-\sqrt{3} - 3, \sqrt{3} + 3$ | d) 0 |
| 2. | a) FAUX | | b) FAUX | |
| 3. | c) 1 | | d) $\frac{1}{12}$ | |
| 4. | a) VRAI | c) VRAI. | e) FAUX. | g) FAUX. |
| | b) FAUX. | d) FAUX. | f) VRAI. | |
| 5. | a) Converge | d) Diverge | g) Diverge | |
| | b) Converge | e) Diverge | h) Converge | |
| | c) Converge | f) Converge | i) Diverge | |
| 6. | a) $c < \frac{1}{2}$ | b) $ c < 1$ | c) $c \neq 2k + 1$ | d) $ c < e$ |