EPFL – Automne 2025	S. Basterrechea
Analyse I – CGC, EL, MX	**Exercices**
Série 6	27 octobre 2025

Exercice 1.
Soient deux suites réelles (x_n) et (a_n). Démontrer à l'aide du théorème des deux gendarmes, que

$$\text{si} \quad \begin{cases} |x_n| \leq a_n, \quad \forall\ n \geq n_0, \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

où n_0 est un certain entier positif.

Exercice 2.
Soit $a_n = \frac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n}\right)$

Exercice 3.
Déterminer, si elle existe, la limite $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$
b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$
c) $a_n = e^n$
d) $a_n = e^{-n}$
e) $a_n = \dfrac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)}$
f) $a_n = 3^n e^{-3n}$
g) $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$
h) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
i) $a_n = n\ \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)$
j) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 4.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
Vrai ou faux ?

a) Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.
b) Toute suite décroissante converge.
c) Toute suite négative et croissante converge.
d) Si $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (a_n) converge vers a, alors $a > 0$.
e) Si (a_n) converge, alors $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$.
f) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.
g) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.
h) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$, alors (a_n) est une suite bornée.

Exercice 5.
En utilisant la technique du conjugué

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+3}}{5}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+3}-\sqrt{(2n+1)(n+4)}$

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+2n}-\sqrt{n^3+4})$

Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, que si (x_n) est telle que pour tout n, $x_n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{l}$. On le démontrera dans le Chapitre 5.

Exercices challenges.

Exercice 6.
Calculer $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

Exercice 7.
Démontrer que la limite d'une suite convergente est unique.

Indication : Supposer par l'absurde qu'une suite admet deux limites L_1 et L_2 distinctes et travailler avec $\varepsilon := |L_1 - L_2|$.

Solutions.

2. a) 3 b) 1/3 c) 2

3. a) 0 b) 0 c) ∞ d) 0 e) $\tan(1)$ f) 0 g) $\frac{5}{3}$ h) 0 i) 0 j) 0

4. a) FAUX. b) FAUX. c) VRAI. d) FAUX. e) FAUX. f) VRAI. g) FAUX. h) FAUX.

5. a) 0 b) 0 c) $-\frac{9\sqrt{2}}{4}$ d) 1