

Partie I : Séries entières

Rappel.

1. Une **série entière** a la forme

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

avec $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Le **rayon de convergence** R satisfait

- $0 < R < \infty \iff S(x)$ converge si $|x - x_0| < R$ et $S(x)$ diverge si $|x - x_0| > R$;
- $R = 0 \iff S(x)$ diverge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$;
- $R = \infty \iff S(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. L'**intervalle de convergence** $I \subset \mathbb{R}$ satisfait

$$x \in I \iff S(x) \text{ converge.}$$

Il est toujours de la forme

$$]x_0 - R, x_0 + R[, \quad [x_0 - R, x_0 + R[, \quad]x_0 - R, x_0 + R] \quad \text{ou} \quad [x_0 - R, x_0 + R].$$

Exercice 1.

Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence des séries entières données ci-dessous.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} x^n \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^n + 1}} x^n \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n3^{n+1}} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2} (x-2)^n$$

Partie II : primitives et intégrales indéfinies

Exercice 2.

A partir des primitives usuelles et des primitives de compositions, trouver des primitives pour les fonctions f suivantes.

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = \sin(2x + 1)$ | j) $f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ |
| b) $f(x) = \cos\left(4 - \frac{x}{10}\right)$ | k) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (<i>utiliser le point précédent</i>) |
| c) $f(x) = \tan(x)$ | l) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ |
| d) $f(x) = e^{-x}$ | m) $f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ |
| e) $f(x) = \sinh(x)$ | n) $f(x) = x^2 e^{x^3}$ |
| f) $f(x) = \cosh(x)$ | o) $f(x) = (ax^p + b)^s x^{p-1}$ ($s \neq -1, a, p \neq 0$) |
| g) $f(x) = x \sin(x^2)$ | p) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. |
| h) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ | |
| i) $f(x) = (ax + b)^p$ ($p \neq -1$) | |

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx \quad \text{c) } \int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx \quad \text{d) } \int \frac{\sinh(x)}{e^x+1} dx$$

Exercice 4.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

A l'aide du théorème de continuité de la dérivée, montrer par l'absurde que f n'admet pas de primitive.

Partie III : intégrales définies

Exercice 5.

Soit $f \in C^0([a, b])$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

a) Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a, b]$.

Indication : utiliser le théorème de la moyenne.

b) Si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

c) Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx < 0$.

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.

d) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

e) Pour tout $x \in [a, b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Exercice 6.

Vérifier les deux inégalités suivantes

$$\frac{7}{100} < \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3} dx < \frac{1}{10}.$$

Indication : Borner le dénominateur, intégrer le numérateur et utiliser le fait que $e > \frac{5}{2}$.

Exercice 7 (Intégrale de Gauss).

Calculer le développement limité d'ordre 6 de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ en $x_0 = 0$, et en déduire une valeur approchée de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Remarque : Les 4 premières décimales exactes de cette intégrale sont 0,7468.

Partie IV : Intégration par parties

Exercice 8.

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int x^2 \cos(x) dx$

b) $\int e^{ax} \cos(bx) dx \quad (a \neq 0)$

Exercice 9.

Pour chaque intégrale I_n suivante, calculer I_0 et déterminer une formule récursive (c'est à dire I_n exprimé en fonction de I_{n-1}), avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $I_n = \int \ln(x)^n dx$

b) $I_n = \int_0^1 x^{2n} \cos(\pi x) dx$