Partie I : Développements limités et formule de Taylor

Rappel : formule de Taylor. Soient $\subset \mathbb{R}^n$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f \in C^n(I)$. Alors f admet un développements limité d'ordre n en x_0 ($DL_n(x_0)$) donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \ + \ R_n(x), \ \forall x \in I,$$

où $R_n(x)$ (le reste) satisfait

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Nous pouvons aussi utiliser les notations suivantes pour le reste :

- avec le epsilon : $R_n(x) = (x-x_0)^n \cdot \epsilon(x)$, avec $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$;
- avec le petit o : $R_n(x) = o(|x-x_0|^n)$ = « *n'importe quelle fonction qui tend vers* 0 *plus rapidement que* $|x-x_0|^n$ *quand* $x \to x_0$».

Exercice 1.
Avec la formule de Taylor, déterminer le développement limité d'ordre 3 des fonctions f suivantes autour de $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $f(x) = \ln(2+x)$

Exercice 2.
Soient $b, c \in \mathbb{R}$, $I =]-1, 1[$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = bx + cx^2 + x^4 \cdot \epsilon_1(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$. Vrai ou Faux ?

a) f est continue en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = b$.

c) f est dérivable en $x = 0$.

d) Si $f \in C^2(I)$, alors $f''(0) = c$.

e) $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + x^6 \cdot \epsilon_2(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

Partie 2 : calcul de limites

Exercice 3.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\cos(x)-1) - \cos(\sin(x)) + 1}{x^4} & \text{pour } x \neq 0\,, \\ c & \text{pour } x = 0\,. \end{cases}$$

Quelle est la valeur de $c \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue en $x = 0$?

☐ 0

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $-\frac{1}{6}$

☐ $\frac{1}{4}$

Exercice 4.
En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^5}\left(x - \dfrac{x^3}{6} - \sin(x)\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Partie III : DL de compositions de fonctions

Exercice 5.
Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ de fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \ln(\cos(x)) \qquad (n = 4)$

b) $f(x) = e^{\sin(x)} \qquad (n = 4)$

c) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)} \qquad (n = 3)$

Exercice 6.
Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)} \ .$$

Indication : Introduire la variable $y := x - \frac{\pi}{3}$, puis utiliser de la trigonométrie et des DL connus pour calculer le DL de $\cos(x)$.

Partie IV : Séries de Taylor

Rappel : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f \in C^\infty(I)$. La **série de Taylor** de f est la série

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \ \forall x \in I.$$

On dit que f est **analytique en** x_0 si la série de Taylor converge vers $f(x)$ dans un voisinage de x_0, c'est à dire $\exists R > 0$ tel que

$$T_f(x) = f(x). \quad \forall x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[.$$

On appelle R le **rayon de convergence** de la série.
Si la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, on dira que $R = +\infty$.
Si la série converge seulement pour $x = x_0$, on dira que $R = 0$.

Exercice 7.
Trouver les séries de Taylor en $x = 0$ des fonctions f suivantes et déterminer l'ensemble I des valeurs de x telles que $T_f(x)$ converge (il n'est pas nécessaire de montrer que sa limite est $f(x)$).

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = \ln(1 + x)$

e) $f(x) = \ln(1 - x)$

f) $f(x) = \sinh(x)$

g) $f(x) = \cosh(x)$

Exercice 8.
Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3 + 4x}$ est analytique en x_0 et déterminer l'intervalle de convergence de la série de Taylor. Considerer les valeurs de x_0 suivantes :

(*i*) $x_0 = 0$ (*ii*) $x_0 = 2$

Exercice 9.
A l'aide de séries de Taylor connues, déterminer la série de Taylor de $f(x)$ autour de x_0 et donner son rayon de convergence et son intervalle de convergence.

a) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ avec $x_0 = 2$.