

Exercice (A déposer sur Moodle au plus tard le 28 novembre à 23h59.).

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

On appelle c un **point fixe** de f .

Partie I : La dérivée

Exercice 1.

Avec la définition de la dérivée, calculer la dérivée des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Indication : Utiliser

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

Exercice 2.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Déterminer les valeurs de x sur lesquelles la fonction est dérivable et calculer $f'(x)$.

Exercice 3.

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable partout.

Partie II : Règles de calcul

Exercice 4.

Calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \frac{5x + 2}{3x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $f(x) = \sin(x)^2 \cos(x^2)$

d) $f(x) = x^x := e^{x \ln(x)}$

e) $f(x) = \sinh(x)$

f) $f(x) = \cosh(x)$

g) $f(x) = \tanh(x)$

Exercice 5.

Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1) \sin(x)^7 \cos(x)^4$ et $g(x) = \ln(x)^3$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = (x - 1)^4$.

Exercice 6.

Calculer la dérivée de la réciproque f^{-1} des fonctions $f : I \rightarrow f(I)$ suivantes, et donner le domaine de définition de $(f^{-1})'$

- (i) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (iv) $f(x) = \cosh(x)$ sur $I = [0, \infty[$
(ii) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$
(iii) $f(x) = \sinh(x)$ sur \mathbb{R} (v) $f(x) = \tanh(x)$ sur \mathbb{R}

Rappel : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Partie III : Applications de la dérivée

Exercice 7.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Démontrer que

$$f \text{ décroissante sur } [a, b] \iff f' \leq 0 \text{ sur }]a, b[.$$

Exercice 8 (Exponentielle en base a).

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = a^x := e^{x \ln(a)}$$

où \ln est la fonction logarithme naturel.

- Calculer $(a^x)'$
- A l'aide du corollaire du T.A.F, montrer que f est strictement monotone.
- En déduire l'existence de la réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on notera $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ (logarithme en base a).
- Calculer $\log'_a(x)$.

Exercice 9.

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\tanh(x) - 1) \qquad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{1/x}$$

Exercices challenges.

Exercice 10.

Démontrer le **théorème des accroissements finis généralisé (T.A.F.G.)** :

soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Indication : appliquer le théorème de Rolle à une fonction $h(x)$ bien choisie (comme dans la preuve du théorème des accroissements finis).

Exercice 11.

Déduire du T.A.F.G. la **règle de Bernoulli-L'Hôpital** :

soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telle que

- $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$
- $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Indications :

- Commencer par prolonger f et g par continuité sur $[a, b[$;
- Considérer une suite $x_n \rightarrow a$ et montrer l'existence d'une suite (c_n) telle que

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

- Conclure avec la caractérisation des limites par les suites :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L, \forall \text{ suite } a_n \rightarrow x_0.$$