

**Remarque**

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

**Exercice 1.**

🎯 **Objectif:** À quoi ça sert les maths ?

Cet exercice est adapté d'un exercice dans *Mathematics for the Life Sciences* par Bodine, Lenhart, Gross, Princeton University Press, 2014.

Supposons qu'on ait un médicament et qu'un patient en élimine 10% chaque heure. Supposons de plus que le médicament est administré en dose de 200 mg toutes les 6 heures. Si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est la suite définie par

$$x_n = \begin{cases} \text{quantité de médicament présent dans le corps d'un patient} \\ \text{au bout de } n \text{ heures de traitement en mg.} \end{cases}$$

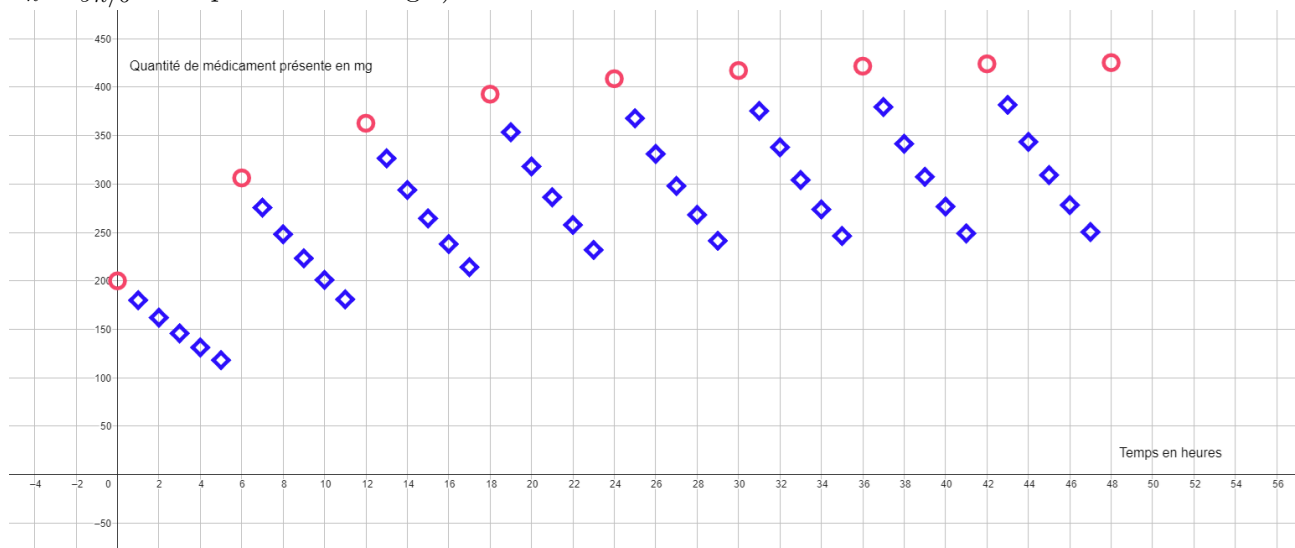
On a alors,

$$\begin{aligned} x_0 &= 200 & x_4 &= 0.9x_3 \\ x_1 &= 0.9x_0 & x_5 &= 0.9x_4 \\ x_2 &= 0.9x_1 & x_6 &= 0.9x_5 + 200 \\ x_3 &= 0.9x_2 & x_7 &= 0.9x_6 \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Pour finir, soit la sous-suite

$$y_k = x_{6k} = \begin{cases} \text{quantité de médicament présent dans le corps d'un patient} \\ \text{au bout de } 6k \text{ heures de traitement en mg.} \end{cases}$$



Ci-dessous, une illustration de la suite avec  $(x_n)$  en bleu et  $(y_k)$  en rouge. (Pour  $n$  divisible par 6,  $x_n = y_{n/6}$  est représenté en rouge.)



(i) Décrire  $y_k$  comme une suite définie par récurrence (pas besoin de justifier.)

- (ii) Analyser la convergence de la suite  $(y_k)_{k \geq 0}$  comme dans les exercices précédents (limites possibles, bornes, monotonie ; ne pas utiliser l'exemple 3.56).
- (iii) Sachant qu'une présence de 450 mg du médicament dans le corps d'un patient présente un risque de toxicité, ce traitement est-il potentiellement dangereux sur le long terme ? Utiliser votre analyse du point précédent.

### Exercice 2.



 **Objectif:** Monotonie d'une composition de fonctions  
 **Théorie nécessaire:** §4.1

Soient les fonctions  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Déterminer la monotonie de leur composée  $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si

- (i)  $f$  et  $g$  sont croissantes,
- (ii)  $f$  et  $g$  sont décroissantes,
- (iii)  $f$  est croissante et  $g$  est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de  $f \circ g$  dans le cas (iii) ?

### Exercice 3.

 **Objectif:** Propriétés qualitatives de la fonction réciproque  
 **Théorie nécessaire:** §4.1

- (i) Si  $f: X \rightarrow Y$  est croissante et bijective, alors  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  est
  - décroissante
  - croissante
  - ni croissante ni décroissante
  - bornée
- (ii) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction impaire et bijective, alors  $f^{-1}$  est
  - impaire
  - paire
  - ni paire ni impaire
  - périodique

**Exercice 4.** (i) Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n \log \left( \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) = \log \left( \frac{n+1}{n+2} \right) + \log(2).$$

(ii) En déduire la valeur de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left( \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right).$$

*Indication :* on pourra utiliser sans démonstration que si  $(x_n)$  est une suite telle que pour tout  $n$ ,  $x_n > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(x_n) = \log(l)$ . On le montrera dans le Chapitre 5.

### Exercice 5.

**🎯 Objectif:** Établir la monotonie de fonctions bien connues

(i) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-k-1}$$

(ii) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^n$ .

Montrer que  $f$  est croissante.

(iii) Soit  $n \in \mathbb{N}$  impair et  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^n$ .

Montrer que  $f$  est croissante.

*Suggestion* : En choisissant  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $x \leq y$  afin de montrer la croissance de  $f$ , distinguer les cas  $0 \leq x \leq y$ ,  $x \leq 0 \leq y$  et  $x \leq y \leq 0$ . Pour le dernier cas, utiliser que  $f$  est impaire et le résultat du point (ii).

(iv) Soit  $n \in \mathbb{N}$  pair et  $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^n$ .

Montrer que  $f$  est décroissante.

*Suggestion* : utilisez le fait que  $x^n$  est paire.

**Exercice 6.**

Vrai ou faux ?

Q1 : Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique. La plus petite période de  $f$  est toujours définie, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit  $T > 0$  tel que  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Q2 : Si  $f$  est périodique, alors  $|f|$  est aussi périodique.

Q3 : Si  $|f|$  est périodique, alors  $f$  est aussi périodique.

Q4 : Si  $f$  et  $|f|$  ont une plus petite période, celles-ci sont égales.

**Exercice 7.**

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions  $f$  suivantes, en donnant la plus petite période si possible :

(i)  $f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin^2(x)}$

(ii)  $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

(iii)  $f(x) = \tan(3x) + \cos(\pi x)$

(iv)  $f(x) = (x - [x])^2$ , où  $[x]$  est la partie entière inférieure de  $x \in \mathbb{R}$ . Par exemple  $[\pi] = 3$ ,  $[2.9] = 2$ ,  $[-1.5] = -2$ .

**Exercice 8.**

**🎯 Objectif:** Manipulation théorique de fonctions paires/impaires

**📖 Théorie nécessaire:** §4.1

Montrer la proposition 4.6 du cours.

**Proposition 4.6**

Soient  $D \subset \mathbb{R}$  un ensemble symétrique,  $p_1, p_2: D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions paires,  $q_1, q_2: D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions impaires et  $f: p_1(D) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Alors,

(i)  $p_1 + p_2$  est paire.

(ii)  $p_1 p_2$  est paire.

- (iii)  $q_1 + q_2$  est impaire.
- (iv)  $q_1 q_2$  est paire.
- (v)  $p_1 q_1$  est impaire.
- (vi) si  $q_2(D) \subset D$ ,  $q_1 \circ q_2$  est impaire.
- (vii) si  $q_1(D) \subset D$ ,  $p_1 \circ q_1$  est paire.
- (viii)  $f \circ p_1$  est paire.

### Exercice 9.

Soient  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

Vrai ou faux ?

- Q1 : Si  $f$  est strictement monotone, alors  $f$  est injective.
- Q2 : Si  $f$  est injective, alors  $f$  est monotone.
- Q3 : Si  $f$  est bijective et croissante, alors sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est décroissante.
- Q4 : Si  $f \circ g$  est décroissante, alors  $f$  et  $g$  sont décroissantes.

### Exercice 10.

Trouver les valeurs de  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  pour lesquelles les limites suivantes existent dans  $\mathbb{R}$  :

$$(i) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\tan(x - \alpha)^2}{(x - \alpha)^2}; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^4 - 2\alpha x^3 + 4x^2}{(x - \alpha)^2}; \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha|x|}{\sqrt{x^2 + \beta} \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right|}.$$

Indication : pour le (iii), étudier séparément les cas  $\beta = 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\beta > 0$ .

### Exercice 11.

🎯 **Objectif:** Travailler avec la définition de limite de fonction

Montrer à l'aide de la définition de la limite que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 8) = 10.$$

**Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation**

Exercice 4 (ii)  $\log(2)$