Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Objectif: Le module de l'exponentielle d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Proposition 2.14 (i)

Calculer le module des nombres complexes suivants :

(i) e^{i+1}
(ii) $e^{-(i+1)}$
(iii) $e^{-(i-1)}$
(iv) $e^{(i-50)}$
(v) $e^{(1-50i)}$

Exercice 2.

Objectif: Propriétés des suites
Théorie nécessaire: Définition 3.3

Montrer que la suite donnée par $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ (avec $n \geq 1$) est croissante et bornée.

Exercice 3.

Objectif: Propriétés des suites
Théorie nécessaire: Définition 3.3

Déterminer si les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ suivantes sont monotones :

(i) $a_n = n^2 - 4n + 1$
(ii) $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$

Exercice 4.

Objectif: Racines $n^{\text{ème}}$ de nombres complexes
Théorie nécessaire: Cours 2.21-2.24

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(i) $z^5 = 1$
(ii) $z^2 = -3 + 4i$
(iii) $z^4 = -2i$
(iv) $z^3 = -\sqrt{3} + i$

Représenter les résultats graphiquement.

Exercice 5.

Objectif: Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$
Théorie nécessaire: Remarque 2.28

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(i) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ $\qquad$ (ii) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Exercice 6.

Objectif: Racines/factorisation de polynomes dans $\mathbb{C}$
Théorie nécessaire: Exemple 2.27

Factoriser les polynômes suivants :

(i) $p(z) = \frac{1}{2}z^3 - 4z^2 + 7z - 6$ $\qquad$ (ii) $p(z) = z^3 - (3+3i)z^2 + (-2+9i)z + 6$

Indication : Après avoir fait la liste de toutes les valeurs z_0 pour lesquelles on teste $p(z_0)$ pour voir si on obtient 0 (y en a pas mal) tester avec $z_0 = -1, 1, 3, 6$ (ça fait moins à tester).

Exercice 7.
Vrai ou faux ?

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$. (*Voir Remarque 0.46 (p.16) du polycopié.*)

Q2 : Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ soit purement imaginaire (c-à-d. sa partie réelle est nulle).

Q4 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ soit réel.

Exercice 8.

Objectif: Écrire des preuves adéquates pour les limites en utilisant la définition
Théorie nécessaire: Exemples 3.9

Montrer à l'aide de la définition de la limite que :

(i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $\qquad$ (ii) $\forall p > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ $\qquad$ (iii) $\forall p > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = 0$

On admettra sans démonstration que pour $p > 0$ (et donc en particulier pour $p = \frac{1}{2}$), la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^p$ est strictement croissante. C'est-à-dire, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y \iff x^p < y^p$. On aura les outils pour le montrer à la fin du chapitre 6.

Exercice 9.

Objectif: Calcul de limites en utilisant des limites connues et les propriétés algébriques des limites
Théorie nécessaire: Exemples 3.9, Proposition 3.17 et exemple 3.18

Déterminer, si elle existe, la limite $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

(i) $a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$

(ii) $a_n = \frac{1}{2^n}$

(iii) $a_n = e^n$

(iv) $a_n = e^{-n}$

(v) $a_n = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)}$

(vi) $a_n = 3^n e^{-3n}$

Exercice 10.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
Vrai ou faux ?

Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.

Q2 : Si (a_n) converge, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|a_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q3 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q4 : Une suite convergente peut admettre plusieures limites.

Q5 : Toute suite décroissante converge.

Q6 : Si $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (a_n) converge vers a, alors $a > 0$.

Exercice 11.
Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ la suite définie par

$$a_k = \frac{6-2k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

et $(x_n)_{n\geq 1}$, la suite définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{6-2k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

(i) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \frac{2n}{(n+2)(n+3)}$$

(ii) Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1
- (i) e
- (ii) $\frac{1}{e}$
- (iii) e
- (iv) e^{-50}
- (v) e

Exercice 4
- (i) $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$
- (ii) $z_0 = -1 - 2i$, $z_1 = 1 + 2i$
- (iii) $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$, $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$
- (iv) $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{18}}$, $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{18}}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{29\pi}{18}}$

Exercice 5
- (i) $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = -4 - 2i$
- (ii) $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$, $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}$, $z_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Exercice 6
- (i) $p(z) = \frac{1}{2}(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z - 6)$
- (ii) $p(z) = (z - i)(z - 2i)(z - 3)$

Exercice 9
- (i) 0
- (ii) 0
- (iii) $+\infty$
- (iv) 0
- (v) $\tan(1)$
- (vi) 0

Exercice 11
- (ii) 0