

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

🎯 Objectif: Être capable de donner l'infimum et le supremum d'un intervalle et d'une union d'intervalles. Distinguer quand le supremum est un maximum ou l'infimum est un minimum
📖 Théorie nécessaire: Exemple 1.19

Donner l'infimum et le supremum des sous-ensembles de \mathbb{R} ci-dessous et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum (*pas besoin de faire la démonstration*).

$$(i) A =] - 1, \sqrt{2}] \quad (ii) B =]\sqrt{3}, \infty[\quad (iii) C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$$

Exercice 2.

🎯 Objectif: Utiliser les notions de partie réelle, imaginaire et conjugué correctement
📖 Théorie nécessaire: Cours 2.1-2.2

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Exercice 3.

🎯 Objectif: Réécrire des ensembles sous-forme d'intervalle

Réécrire les sous-ensembles suivants en utilisant la notation des intervalles :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 1\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}$
6. $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 \geq 3\}$

Exercice 4.

Exprimer chacun des sous-ensembles de \mathbb{R} ci-dessous en termes de réunions ou d'intersections d'intervalles (ouverts, fermés ou non).

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1000\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 100\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x^3 = 27\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 33\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$

Exercice 5.

🎯 Objectif: Écrire des démonstrations pour justifier le supremum, infimum
📖 Théorie nécessaire: Exemple 1.12

Soit $b \in \mathbb{R}$.

- (i) Montrer que $I =] - \infty, b[$ n'est pas minoré et $\sup I = b$.
- (ii) Montrer que $I = [b, +\infty[$ n'est pas majoré et $\inf I = b$.

Exercice 6.

🎯 Objectif: Tester des possibles fausses idées qui peuvent apparaître avec le supremum et l'infimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un **intervalle** borné non vide.

Vrai ou faux ?

- Q1 : Il suit que $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.
- Q2 : Si $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$, alors A est fermé.
- Q3 : Si A est fermé, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.
- Q4 : Si $\sup A \notin A$ et $\inf A \notin A$, alors A est ouvert.
- Q5 : Si A est ouvert, alors $\inf A \notin A$ et $\sup A \notin A$.

Exercice 7.

🎯 Objectif: Résoudre des équations en particulier avec des valeurs absolues

Résoudre les inéquations suivantes :

- (i) $x^2 - 2x - 2 < 0$ pour $x \in \mathbb{R}$
- (ii) $|x - 2| \leq |x + 3|$ pour $x \in \mathbb{R}$
- (iii) $\frac{1}{1 - |x|} < 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
- (iv) $\frac{x}{|x| - 2} + \frac{|x|}{x + 1} \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, -1\}$

c'est-à-dire spécifier (en termes d'unions d'intervalles) les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ tels que les inéquations sont satisfaites pour tout $x \in A$ et pas satisfaites pour $x \notin A$.

Indication : il est parfois utile de considérer plusieurs cas séparément.

Exercice 8.

🎯 Objectif: Résoudre des équations en particulier avec des valeurs absolues

Le plus grand sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$

$$||x - 1| - 1| \leq ||x| - 1|$$

est

- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \infty[$
- $[-\frac{1}{2}, 0] \cup]1, 2[$
- $[0, \frac{1}{2}] \cup [2, \infty[$
- $[\frac{3}{2}, \infty[$

Exercice 9.

🎯 Objectif: Simplifier des expressions complexes

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

(i) $(2 - 3i)(3 + 2i)$

(iii) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i}$ (v) $\left(\frac{10-15i}{2+i}\right) \left(\frac{1+i}{1-3i}\right)$

(ii) $\frac{2-3i}{4-5i}$

(iv) $\frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i}$

Exercice 10.

🎯 Objectif: Trouver l'argument et le module de nombres complexes en vue de les écrire sous forme polaire

📖 Théorie nécessaire: Exemple 2.8

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

(i) -2

(iii) $-1 + i\sqrt{3}$

(v) $\frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$

(ii) $2 + 2i$

(iv) $-1 + i \tan(3)$

Exercice 11.

🎯 Objectif: Utiliser les formules d'Euler pour redémontrer des identités trigonométriques

📖 Théorie nécessaire: Cours 2.15-2.16

Dans la série 1, on avait rappelé les formules suivantes :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sin(x) - \sin(y)$$

Montrer ces formules à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 12.

🎯 Objectif: Repérer des erreurs de grammaire mathématique.

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. On a alors que la propriété

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M, |f(x)| \leq \varepsilon.$$

est vraie.

Ci-dessous, deux démonstration du résultat. Dans l'une d'elles, nous avons glissé deux erreurs. Laquelle de ces deux démonstrations est correcte et où sont les problèmes ?

Remarque.

la propriété ci-dessus sera étudiée dans le chapitre 4, c'est-à-dire, vous n'êtes pas sensé · e comprendre ce que la propriété veut dire. Les problèmes dans la démonstration ne sont pas dûs à ce que la démonstration raconte, mais plutôt, dans la grammaire employée dans la démonstration.

Démonstration. On doit montrer qu'on peut trouver $M \geq 0$ tel que dès que $x \geq M$, $|f(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$, quelque soit $\varepsilon > 0$.
Posons $M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ et considérons $x \geq M$ quelconque. Alors,

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2} \stackrel{x \geq M}{\leq} \frac{1}{M^2} \stackrel{M=1/\sqrt{\varepsilon}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon.$$

ε étant quelconque, on a le résultat voulu. \square

Démonstration. On doit montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $M \geq 0$ tel que dès que $x \geq M$, $|f(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ et considérons $x \geq M$ quelconque. Alors,

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2} \stackrel{x \geq M}{\leq} \frac{1}{M^2} \stackrel{M=1/\sqrt{\varepsilon}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon,$$

ε étant quelconque, on a le résultat voulu. \square

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 9 Si $z = a + ib$ avec $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$,

(i) $12 - 5i$

(ii) $\frac{23}{41} - i\frac{2}{41}$

(iii) $4/5 - 6/5i$

(iv) $0 - 2i$

(v) $3 + 2i$

Exercice 10 Si $z = \rho e^{i\phi}$ avec $\rho = |z|$ et $\phi = \arg(z)$,

(i) $2e^{i\pi}$

(ii) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(iii) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(iv) $\frac{1}{|\cos(3)|}e^{-3i}$

(v) $5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$