

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.



Exercice 1.

 **Théorie nécessaire:** Cours 0.8-0.10

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5, 6\}$.

1. Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?
2. Montrer que le produit cartésien n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$.

Exercice 2.

 **Objectif:** Se familiariser avec la grammaire mathématique
 **Théorie nécessaire:** Slides cours d'introduction

Pour les paires d'énoncés ci-dessous, comprendre la différence entre les deux et déterminer si ils sont vrais ou faux

(i)

énoncé 1 : Pour chaque pomme, il existe un arbre tel que la pomme a poussé sur cet arbre
énoncé 2 : Il existe un arbre tel que pour chaque pomme, la pomme a poussé sur cet arbre

(ii)

énoncé 1 : Pour chaque étudiant $\cdot e$ de l'EPFL, il existe un numéro à 6 chiffres tel que ce numéro est le numéro SCIPER de l'étudiant $\cdot e$
énoncé 2 : Il existe un numéro à 6 chiffres tel que pour chaque étudiant $\cdot e$ de l'EPFL, ce numéro est le numéro SCIPER de l'étudiant $\cdot e$

(iii)

énoncé 1 : Pour chaque sommet des Alpes, il existe un sommet dans l'Himalaya qui est plus haut
énoncé 2 : Il existe un sommet dans l'Himalaya qui est plus haut que chaque sommet des Alpes

(iv)

énoncé 1 : Pour chaque point à la surface de la planète A, il existe un point B qui est pile à l'antipode.
énoncé 2 : Il existe un point B à la surface de la planète tel que chaque point à la surface de la planète A à pile à l'antipode de B.

(v)

énoncé 1 :Pour chaque anneau de puissance que Sauron a donné aux humains,
il existe un anneau pour les gouverner tous.

énoncé 2 :Il existe un anneau tel que chaque anneau de puissance que Sauron
a donné aux humains est gouverné par cet anneau.

Des sources sur le sujet :

en anglais : <https://youtu.be/qj139dE7tFI?si=WMnIBVQ-mL9Hhcer&t=37>

en français : <https://youtu.be/5tddNO6YVZU?si=xbMGNMihC5kc7P-Z>

Exercice 3.

 **Objectif:** Opérations sur les ensembles

 **Théorie nécessaire:** Cours 0.6-0.9

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.

On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B , et $A \cap B$ pour leur intersection, c.-à-d.

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Vrai ou faux ?

Q1 : $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$

Q2 : Soient $A, B \neq \emptyset$. $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

Q3 : $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Exercice 4.

Pour des détails supplémentaires, voir Annexe A du polycopié.

Une “proposition (logique)” est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit p et q des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations non (“non” logique), et (“et” logique), ou (“ou” logique), \Leftrightarrow (l’équivalence logique) et \Rightarrow (l’implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

p	non p
V	F
F	V

p	q	$p \text{ et } q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \text{ ou } q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(i) (Équivalences logiques)

Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

(a) $(\text{non}(\text{non } p)) \Leftrightarrow p$ (loi de la double négation).

(b) $(p \text{ et } p) \Leftrightarrow p$,
 $(p \text{ ou } p) \Leftrightarrow p$ (idempotence).

(c) $(p \text{ et } q) \Leftrightarrow (q \text{ et } p)$,
 $(p \text{ ou } q) \Leftrightarrow (q \text{ ou } p)$ (commutativité).

(d) $(\text{non}(p \text{ et } q)) \Leftrightarrow ((\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q))$,
 $(\text{non}(p \text{ ou } q)) \Leftrightarrow ((\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q))$ (lois de DE MORGAN).

(e) $((p \text{ et } q) \text{ et } r) \Leftrightarrow (p \text{ et } (q \text{ et } r))$,
 $((p \text{ ou } q) \text{ ou } r) \Leftrightarrow (p \text{ ou } (q \text{ ou } r))$ (associativité).

- (f) $((p \text{ et } q) \text{ ou } r) \Leftrightarrow ((p \text{ ou } r) \text{ et } (q \text{ ou } r))$,
 $((p \text{ ou } q) \text{ et } r) \Leftrightarrow ((p \text{ et } r) \text{ ou } (q \text{ et } r))$ (distributivité).
- (g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\text{non } p) \text{ ou } q)$ (définition de l'implication).
- (h) $(\text{non } (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \text{ et } (\text{non } q))$ (négation de l'implication).
- (i) $((p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitivité de l'implication).
- (j) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p))$ (propositions équivalentes).
- (k) $((\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (contraposé de l'implication).

A noter que la véracité de la réciproque de la proposition $p \Rightarrow q$ c'est-à-dire la proposition $q \Rightarrow p$ n'a aucun rapport avec la véracité de la proposition $p \Rightarrow q$.

Dans la suite, pour économiser des parenthèses, nous utiliserons les priorités habituelles sur les opérations et, si convenable, nous écrirons que $p \Leftarrow q$ au lieu de $q \Rightarrow p$.

(ii) (Les quantificateurs \forall et \exists , une variable)

Soit E un ensemble et pour $x \in E$ soit $p(x)$ et $q(x)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x). On écrira $\forall x \in E, p(x)$ pour dire que "pour tous les éléments $x \in E$, la proposition $p(x)$ est vraie", et $\exists x \in E : p(x)$ pour dire que "il existe $x \in E$ tel que la proposition $p(x)$ est vraie". Se convaincre que (il ne s'agit pas de le montrer) :

- (a) $(\text{non } (\forall x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E : \text{non } (p(x)))$.
- (b) $(\text{non } (\exists x \in E : p(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \text{non } (p(x)))$.
- (c) $(\forall x \in E, p(x) \text{ et } q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E, p(x)) \text{ et } (\forall x \in E, q(x)))$.
- (d) $(\exists x \in E : p(x) \text{ ou } q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E : p(x)) \text{ ou } (\exists x \in E : q(x)))$.
- (e) $(\forall x \in E, p(x) \text{ ou } q(x)) \Leftarrow ((\forall x \in E, p(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, q(x)))$.
- (f) $(\exists x \in E : p(x) \text{ et } q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in E : p(x)) \text{ et } (\exists x \in E : q(x)))$.

Pour les deux cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.


(iii) (Les quantificateurs \forall et \exists , deux variables)


Soit E et F des ensembles et pour $x \in E$ et $y \in F$ soit $p(x, y)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x et de y). Se convaincre que (il ne s'agit pas de le montrer) :

- (a) $((\forall x \in E), (\forall y \in F), p(x, y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in F), (\forall x \in E), p(x, y))$.
- (b) $((\exists x \in E) : (\exists y \in F) : p(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in F) : (\exists x \in E) : p(x, y))$.
- (c) $((\exists x \in E) : (\forall y \in F), p(x, y)) \Rightarrow ((\forall y \in F), (\exists x \in E) : p(x, y))$.

Pour le cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

Exercice 5.

 **Objectif:** Négation d'énoncés avec quantificateurs

 **Théorie nécessaire:** Règles de calcul de la négation données au cours, Remarque A.6 du polycopié

On rappelle que la négation logique d'un énoncé P est l'unique autre énoncé noté $\neg P$ tel que soit P soit $\neg P$ est vrai, mais jamais les deux.

Pour les énoncés suivants, les réécrire en utilisant les quantificateurs \forall et \exists , puis donner la négation de ces énoncés.



Remarques :

- Nous ne prétendons pas que ces énoncés sont vrais ou faux.
- Il existe généralement plusieurs façons de réécrire ces phrases ; le but est plus de vous faire réfléchir sur la négation que de trouver la bonne réponse.

Les énoncés :

- Les ours polaires sont tous gauchers.
- Les films hollywoodiens sont tous de bonne qualité.
- Tous les chats sont mignons et gentils.
- Il y a un pays où on ne parle pas le français.
- Il y a une ville où toutes les lignes de transports publiques sont gratuites.
- Il existe une personne qui est célèbre et heureuse.
- Il existe un nombre réel r tel que quel que soit la fonction réelle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $f(r) \neq 0$

Exercice 6.

 **Objectif:** Opérations sur les ensembles, démonstrations
 **Théorie nécessaire:** Exercices précédents et cours 0.6-0.8

Soit X un ensemble et $A \subseteq X$. Notons $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ le *complémentaire de A dans X* .

- (i) Donner \emptyset^c et X^c .
- (ii) Montrer que $(A^c)^c = A$ pour toute partie $A \subseteq X$.
- (iii) Montrer que $X = A \cup A^c$ et que $A \cap A^c = \emptyset$ pour tout $A \subseteq X$.
- (iv) Montrer que si $A \subseteq B \subseteq X$ alors $B^c \subseteq A^c$.
- (v) Montrer que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ pour toutes parties $A, B \subseteq X$.

Indication : Pour montrer une égalité entre deux ensembles non-vides, procéder par double inclusion. Pour montrer qu'un ensemble est vide procéder par l'absurde : supposer que l'ensemble est non vide, considérer un élément de cet ensemble et arriver à une contradiction.

Annexe

Tous les propositions de l'**Exercice 5 (i)** se peuvent montrer par la construction des tableaux de vérité à partir des tableaux de vérité des définitions. Voici des tableaux de vérité à remplir.

(a)

p	non p	non (non p)

(b)

p	p	p et p

 et

p	p	p ou p

(c)

p	q	p et q	q et p

 et

p	q	p ou q	q ou p

(d)

p	q	p et q	non (p et q)	non p	non q	(non p) ou (non q)

p	q	p ou q	non (p ou q)	non p	non q	(non p) et (non q)

(e)

p	q	r	p et q	(p et q) et r	q et r	p et (q et r)

p	q	r	p ou q	(p ou q) ou r	q ou r	p ou (q ou r)

(f)

p	q	$p \text{ et } q$	r	$(p \text{ et } q) \text{ ou } r$	$p \text{ ou } r$	$q \text{ ou } r$	$(p \text{ ou } r) \text{ et } (q \text{ ou } r)$

p	q	$p \text{ ou } q$	r	$(p \text{ ou } q) \text{ et } r$	$p \text{ et } r$	$q \text{ et } r$	$(p \text{ et } r) \text{ ou } (q \text{ et } r)$

(g)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\text{non } p$	$(\text{non } p) \text{ ou } q$

(h)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\text{non } (p \Rightarrow q)$	$\text{non } q$	$p \text{ et } (\text{non } q)$

(i)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(j)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)$

(k)

p	q	$\text{non } q$	$\text{non } p$	$p \Rightarrow q$	$(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)$