

### Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

### Exercice 1.

- (i) Retrouver la formule de la *Proposition 9.3 (ii)* à partir de celle de la dérivée en chaîne.
- (ii) Retrouver la formule de la *Proposition 9.3 (iii)* à partir de celle de la dérivée d'un produit de fonctions.

### Exercice 2.

 **Objectif:** Série de Taylor et fonction analytique  
 **Théorie nécessaire:** Exemples 8.15, 8.16

Montrer que la fonction  $f(x) = \frac{2}{3+4x}$  est analytique en  $x_0$  et déterminer l'intervalle de convergence de la série de Taylor. Considerer les valeurs de  $x_0$  suivantes :

- (i)  $x_0 = 0$
- (ii)  $x_0 = 2$

### Exercice 3.

 **Objectif:** Série de Taylor  
 **Théorie nécessaire:** Exemples 8.16, 8.20

Déterminer la série de Taylor de  $f(x)$  autour de  $x_0$  et donner son rayon de convergence et son intervalle de convergence.

- (i)  $f(x) = e^{2x+1}$  avec  $x_0 = 0$  ;
- (ii)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  avec  $x_0 = 2$  .

### Exercice 4.

 **Objectif:** DL, série de Taylor  
 **Théorie nécessaire:** Théorème 8.2, exemple 8.9, 8.11 et/ou définition 8.14, exemples 8.15, 8.16

Trouver les coefficients des quatre premiers termes  $a_0, a_1, a_2, a_3$  de la série de Taylor autour de  $x_0 = 0$  des fonctions  $f$  suivantes :

- (i)  $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
- (ii)  $f(x) = \tan(x)$
- (iii)  $f(x) = \arctan(x)$
- (iv)  $f(x) = \sqrt{1 + \tan(x)}$

### Exercice 5.

**🎯 Objectif:** Rayon de convergence, intervalle de convergence

**📖 Théorie nécessaire:** Exemple 8.20

Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence des séries entières données ci-dessous.

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} x^n$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^n + 1}} x^n$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n3^{n+1}}$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2} (x-2)^n$$

### Exercice 6.

**🎯 Objectif:** Calcul de primitive

Trouver des primitives pour les fonctions  $f$  suivantes :

$$(i) f(x) = \sin(x)$$

$$(ii) f(x) = \cos(x)$$

$$(iii) f(x) = \tan(x)$$

$$(iv) f(x) = e^x$$

$$(v) f(x) = \sinh(x)$$

$$(vi) f(x) = \cosh(x)$$

$$(vii) f(x) = \log(x)$$

$$(viii) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(ix) f(x) = (ax+b)^s \quad (s \neq -1)$$

$$(x) f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

$$(xi) f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{utiliser le point précédent})$$

$$(xii) f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$(xiii) f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$(xiv) f(x) = x \exp(x^2)$$

$$(xv) f(x) = (ax^p + b)^s x^{p-1} \quad (s \neq -1, a, p \neq 0)$$

### Exercice 7.

**🎯 Objectif:** Calcul de primitive

Calculer les primitives suivantes :

$$(i) \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx$$

$$(ii) \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx$$

$$(iii) \int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$$

$$(iv) \int \frac{\sinh(x)}{e^x + 1} dx$$

### Exercice 8.

En utilisant que si  $\varphi$  est bijective, alors

$$\int^x f(t) dt = \int^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

(comparer avec la formule de changement de variables donnée au cours) trouver des primitives pour les fonctions  $f$  suivantes, avec le changement de variable  $x = \varphi(u)$  indiqué :

$$(i) f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \varphi: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow ]-1, 1[ \text{ définie par } \varphi(u) = \sin(u).$$

$$(ii) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \varphi: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \varphi(u) = \tan(u).$$

### Exercice 9.

**🎯 Objectif:** Exemple d'une fonction qui n'a pas de primitive  
**📖 Théorie nécessaire:** Proposition 6.12, Définition 9.1

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer par l'absurde que  $f$  n'admet pas de primitive.

*Suggestion : utiliser le Théorème 6.12 (voir Polycopié p. 93).*

### Exercice 10.

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert non-vidé et borné et soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Q1 :  $f$  admet une primitive sur  $I$ .

Dans la suite on restreint le domaine de  $f$  à l'intervalle  $[a, b] \subset I$  où  $a, b \in I$  tels que  $a < b$ .

Q2 : Si  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , alors  $f$  admet un zéro en  $[a, b]$ .

*Suggestion : considérez le résultat (Théorème de la moyenne) qu'il faut montrer dans l'Exercice 12.*

Q3 : Si  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , alors  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

Q4 : Si  $f(x) < 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx < 0$ .

*Suggestion : considérez le résultat (Théorème de la moyenne) qu'il faut montrer dans l'Exercice 12.*

Soit encore  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Q5 : Si  $f(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ , alors  $F(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

Q6 : Pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

### Exercice 11.

**🎯 Objectif:** Estimations sur les intégrales  
**📖 Théorie nécessaire:** Proposition 9.10 (iii)

Vérifier les deux inégalités suivantes

$$\frac{7}{100} < \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3} dx < \frac{1}{10}.$$

*Indication : utiliser le fait que  $e > \frac{5}{2}$ .*

### Exercice 12.

**🎯 Objectif:** Théorème de la Moyenne  
**📖 Théorie nécessaire:** TAF, théorème fondamental du calcul intégral

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. À l'aide du théorème fondamental du calcul intégral et du théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

### Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 4 (i)  $a_0 = 0, a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = -\frac{2}{3}$

(ii)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}$

(iii)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3}$

(iv)  $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{8}, a_3 = \frac{11}{48}$

Exercice 5 (i)  $r = 1, I = [-1, 1[$

(ii)  $r = +\infty, I = \mathbb{R}$

(iii)  $r = \sqrt{3}, I = [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$

(iv)  $r = 1, I = [1, 3]$