

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Déterminer le développement limité d'ordre 3 des fonctions f suivantes autour de $x_0 = 0$.

$$(i) f(x) = \sin(3x)$$

$$(ii) f(x) = \log(2 + x)$$

Exercice 2.

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ de fonctions f suivantes :

$$(i) f(x) = \log(\cos(x)) \quad (n = 4)$$

$$(ii) f(x) = e^{\sin(x)} \quad (n = 4)$$

$$(iii) f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)} \quad (n = 3)$$

Exercice 3.

🎯 **Objectif:** Calcul de limites à l'aide des développements limités

📖 **Théorie nécessaire:** Exemple 8.12

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left(x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) \right)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1 + x)}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$$

Exercice 4.

Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $x_0 = \frac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

Remarque.

L'idée n'est pas de dériver la fonction donnée, mais de se baser sur des développements limités (DL) autour de 0 qui sont bien connus.

Pour les fonctions suivantes, déterminer si elles sont convexes ou concaves et justifier la réponse.

(i) $f: [-3, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

(ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4}{2} + 14x$.

(iii) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$.

(iv) $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

(v) $f:]-\infty, -1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Exercice 10.

Donner les développements limités d'ordre 2 des fonctions f suivantes autour de x_0 . Le but de cet exercice est d'utiliser les développements de fonctions connues et d'utiliser des feintes du loupTM et des feintes du bisonTM.

(i) $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x_0 = 3)$

(ii) $f(x) = e^x \quad (x_0 = 2)$

(iii) $f(x) = \log(3+x) \quad (x_0 = 0)$

(iv) $f(x) = \frac{1}{3x-5} \quad (x_0 = 1)$

(v) $f(x) = \frac{1}{3x+2} \quad (x_0 = 1)$

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1 (i) $3x - \frac{9}{2}x^3 + o(|x|^3)$

(ii) $\log(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(|x|^3)$

Exercice 2 (i) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(|x|^4)$

(ii) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(|x|^4)$

(iii) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(|x|^3)$

Exercice 3 (i) $-\frac{1}{120}$

(ii) 2

(iii) $\frac{1}{18}$

Exercice 4 $\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{13}{108} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$

Exercice 5 $-\frac{1}{6}$

Exercice 7 (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(vi) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} x^n$

Exercice 10 (i) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{8}(x-3)^2 + o(|x-3|^2)$

(ii) $e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + o(|x-2|^2)$

(iii) $\log(3) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}x^2 + o(|x|^2)$

(iv) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{8}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$

(v) $\frac{1}{5} - \frac{3}{25}(x-1) + \frac{9}{125}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$